筑波大学　物質創成科学特別講義I
2008.12.1-12.3

磁気光学入門（第1日）

佐藤勝昭
東京農工大学特任教授
JSTさきがけ「次世代デバイス」研究総括

概要

- この講義では、磁気光学効果が何に応用されているかを簡単に紹介したあと、電磁気学・古典電子論・量子論にもとづき磁気光学効果の基礎を学ぶとともに、磁気光学スペクトル測定法について述べ、最後に、非線形磁気光学効果等、最新の磁気光学研究の話題を紹介します。

この講義のねらい

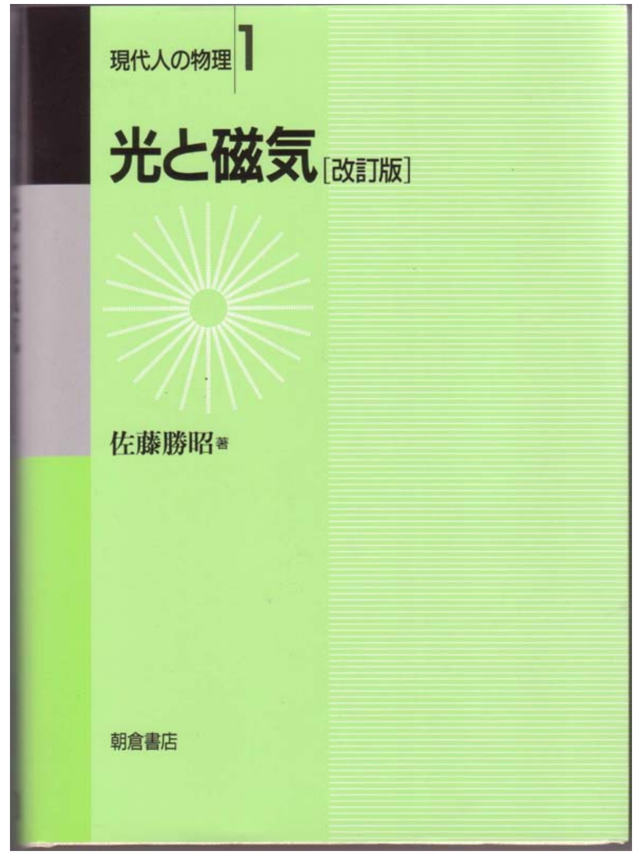
- 磁気光学効果(ファラデー効果、磁気カー効果など)は、日常的に応用されている物理現象です。
- この現象の起源を探る「学び」の過程で、電磁気学、古典電子論、量子論、固体物理、磁性論、材料科学など、学部で学んだ知識を実のあるものにすることができます。
- また、測定法、デバイス応用などを通じて、基礎科学がいかに先端技術に結びついているかを学びます。

特別講義の内容

- 第1日（12月1日）
  1.磁気光学効果とは何か, (3時限)
  2.磁気光学効果は何に応用されているか(4時限)
  3.電磁気学に基づく磁気光学の理論(5時限)
- 第2日（12月2日）
  4.磁気光学効果の電子論(2,3時限)
  5.磁気光学効果の測定法 (4時限)
  6.磁気光学で電子構造をさぐる(5時限)
- 第3日（12月3日）
  7.磁気光学の最近の展開 (2,3時限)

教科書・参考書：光と磁気

- この講義は、拙著「光と磁気(改訂版)」(2002年朝倉書店刊)に基づいています。
- この本の初版は1988年に出版され、日本応用磁気学会から出版賞を受賞しました。
- その後、2001年に改訂版を出版しました。



第1日の内容

- 第1日（12月1日）
  1.磁気光学効果とは何か, (3時限)
  2.磁気光学効果は何に応用されているか(4時限)
  3.電磁気学に基づく磁気光学の理論(5時限)
- 第2日（12月2日）
  4.磁気光学効果の電子論(2,3時限)
  5.磁気光学効果の測定法 (4時限)
  6.磁気光学で電子構造をさぐる(5時限)
- 第3日（12月3日）
  7.磁気光学の最近の展開 (2,3時限)

光と磁気のむすびつき

- 光と磁気のつながりには、
  - 物質の光応答に磁気が寄与する「磁気光学効果」と
  - 物質の磁性に光が影響する「光磁気効果」があります。
- 磁気光学効果には
  - おなじみのファラデー効果、磁気カー効果などいわゆる狭義の磁気光学効果と、ゼーマン効果、磁気共鳴、マグネトプラズマ効果など磁気が電磁波の応答に影響を与える広義の磁気光学効果が含まれます。

光磁気効果

- 光磁気効果のいろいろ
  - 光誘起磁気効果、光誘起磁化(逆ファラデー効果)、光誘起スピン再配列、熱磁気効果が含まれます。
  - 光磁気ディスクの記録には、レーザ光の熱を用いた熱磁気効果が使われています。

- この講義では、主として磁気光学効果に焦点を当てます。

1. 磁気光学効果とは何か

- この現象を学ぶには、偏光という概念から出発しなければなりません。このために、この講義では光は電磁波であるということから出発します。
- 直線偏光が回転したり、楕円偏光になったりする現象（光学活性）を学び、さらに、磁気光学効果が磁界または磁化によって生じる光学活性であることを学びます。

光の偏り（偏光）

- 光は電磁波です。
- 電界ベクトル$\boldsymbol{E}$と磁界ベクトル$\boldsymbol{H}$は直交しています。
- 磁界$\boldsymbol{H}$を含む面を偏光面、電界$\boldsymbol{E}$を含む面を振動面といいます。

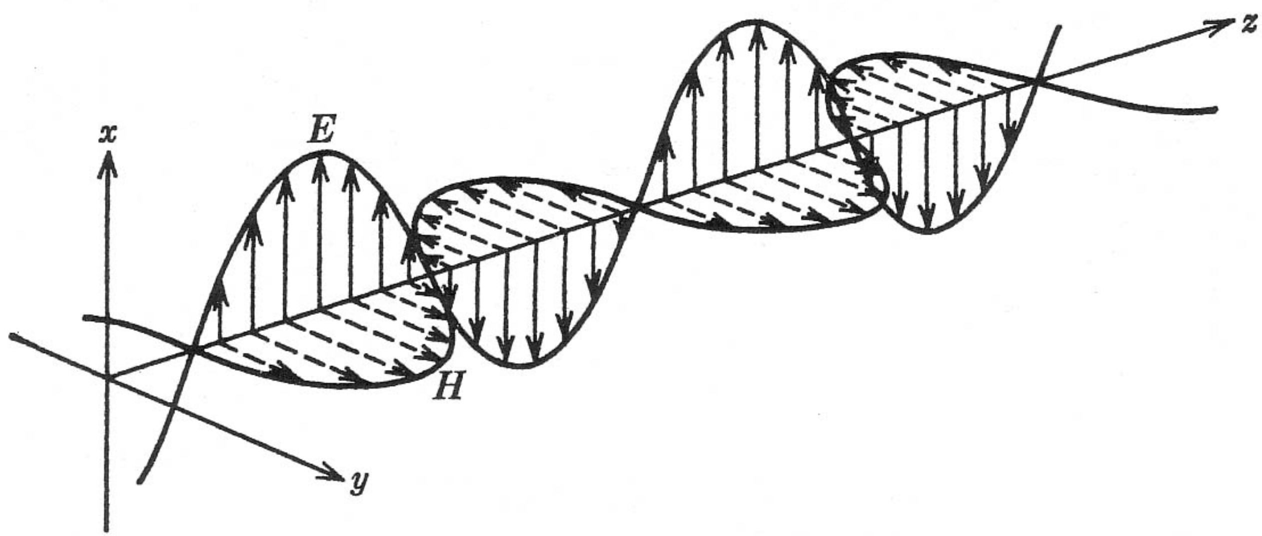


図 2.1　電磁波の電界ベクトル($\boldsymbol{E}$)と磁界ベクトル($\boldsymbol{H}$)

偏光の発見

- １８０８年，ナポレオン軍の陸軍大尉で技術者のE.L. Malus がパリのアンフェル通りの自宅の窓からリュクセンブール宮の窓で反射された夕日を方解石の結晶を回転させながら覗いていた時、偏光の概念を見出しました。

http://www.polarization.com/history/history.html

スケッチ
リュクサンブール宮
佐藤勝昭画

直線偏光

- 偏光面が一つの平面に限られたような偏光を直線偏光と呼びます。
- 直線偏光を取り出すための素子を直線偏光子といいます。
- 直線偏光子には、複屈折偏光子、線二色性偏光子、ワイヤグリッド偏光子、ブリュースタ偏光子などがある。

円偏光

- ある位置で見た電界（または磁界）ベクトルが時間とともに回転するような偏光を一般に楕円偏光といいます。
- 光の進行方向に垂直な平面上に電界ベクトルの先端を投影したときその軌跡が円になるものを円偏光といいます．円偏光には右（回り）円偏光と左（回り）円偏光があります。
（どちらが右まわりでどちらが左まわりかは著者により定義が異なっているので注意。）

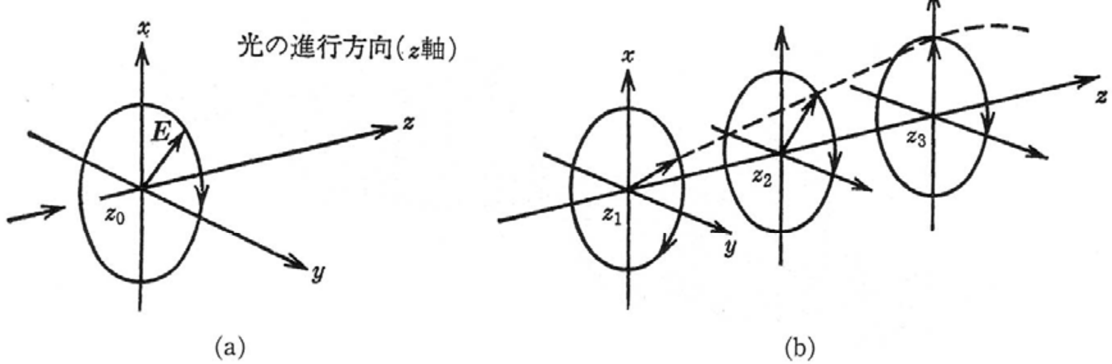
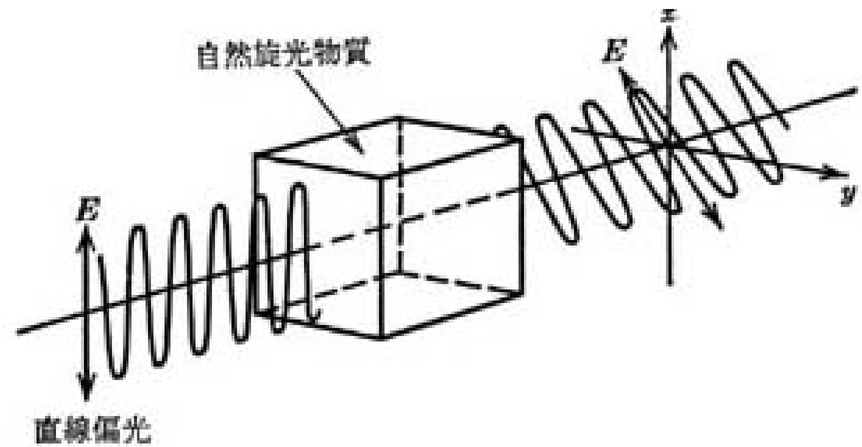


図 2.2　本書での定義による右円偏光
(a)　ある位置で光源を背にして見ると電界ベクトルが時間とともに右まわりに回転.
(b)　時間を止めて電界ベクトルの軌跡をみると進行方向に左まわりになっている.

•円偏光は、直交する2つの直線偏光の合成で、両偏光の振動の位相の間に90°の差がある場合であると考えられる。

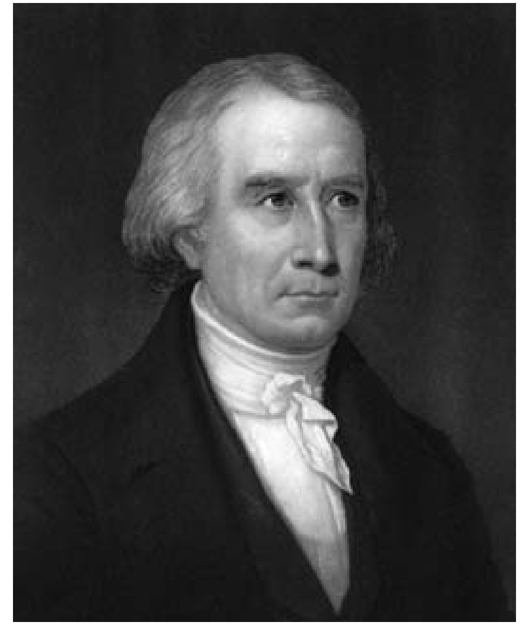
旋光性と円二色性

- 物体に直線偏光を入射したとき、透過してきた光の偏光面がもとの偏光面の方向から回転していたとすると，この物体は自然旋光性を持つといいます。
  - 水晶、ブドウ糖、ショ糖、酒石酸等
- これらの物質には原子の並びにらせん構造があって，これが旋光性の原因になります。



旋光性の発見

- 物質の旋光性をはじめて見つけたのは、フランスのArago（1786-1853）で、1811年に, 水晶においてこの効果を発見しました。
- Aragoは天文学者としても有名で、子午線の精密な測量をBiot（１７７４－１８６２）とともに行い、スペインでスパイと間違われて逮捕されるなど波爛に満ちた一生を送った人です。ちなみに、Biotはビオ・サヴァールの法則の発見者の１人としても有名です。
- Aragoの発見は Biotに引きつがれ、旋光角が試料の長さに比例することや、旋光角が波長の二乗に反比例すること（旋光分散）等が発見されました。



François Arago
1786 - 1853

円二色性

- 酒石酸の水溶液などでは、右円偏光と左円偏光とに対して吸光度が違うという現象がある。これを円二色性という。この効果を発見したのはCottonという人で１８６９年のことです。彼は図２．４のような装置を作って眺めると左と右の円偏光に対して明るさが違うことを発見しました。後で説明しますが、円二色性がある物質に直線偏光を入射すると透過光は楕円偏光になります。

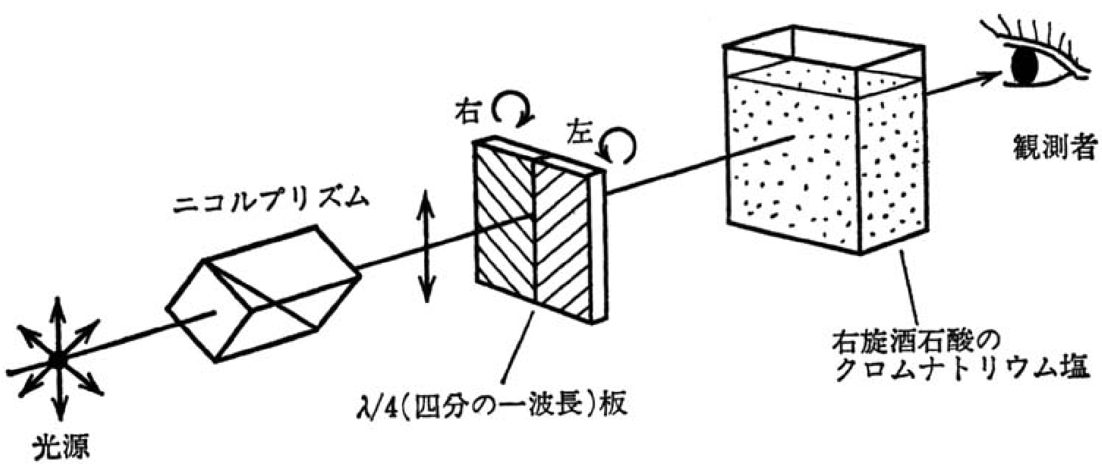
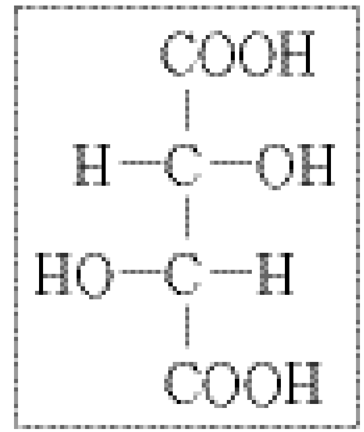


図 2.4　円二色性の観測法 (Cotton による)

図の番号は、教科書「光と磁気」の図番である。

酒石酸

- ワインは、葡萄果実の酸を持つ酒で、この酸は主として酒石酸である。ワインの中では、大部分が酸性の酒石酸カリウムとして存在しています。
- この酸性酒石酸カリウムは、非常に溶解度が小さく、時に結晶として析出します。この結晶が「酒石」で、「ワインのダイヤモンド」とも呼ばれています。ワインのボトルを低温下で長期間保存すると、酒石が徐々に析出します。



光学活性

- 旋光性と円二色性とをあわせて、光学活性と呼びます。一般にこれらの性質は同時に存在します。
- 直線偏光を円二色性をもつ物質に入射すると、出てくる光は楕円偏光になります。
- 円二色性をもつ物質においては、旋光性は楕円偏光の主軸の回転によって定義されます。
- 旋光性と円二色性は、クラマースクローニヒの関係で結びついており、互いに独立ではありません。

クラマース・クローニヒの関係

- 右の図は旋光角のスペクトルと円二色性のスペクトルを1つの図に描いたものです。
- 旋光性と円二色性は互いに独立ではなく、クラマース・クローニヒの関係式で結びついています。一般に物理現象における応答を表す量の実数部と虚数部は独立ではなく、互いに他の全周波数の成分がわかれば積分により求めることができるという関係です。
- 旋光角のスペクトルは、円二色性スペクトルを微分したような形状をもっています。

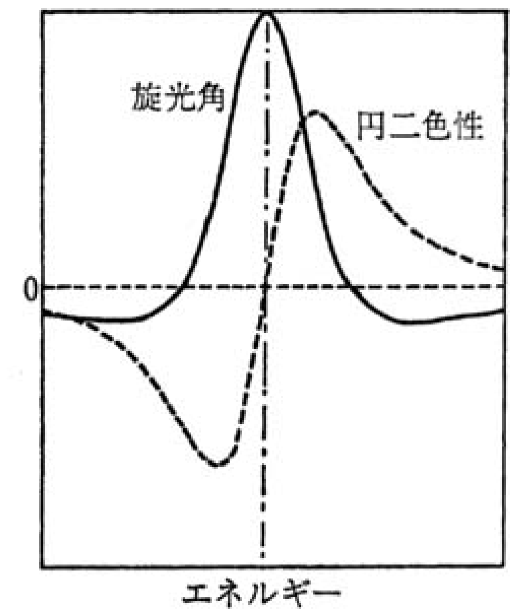
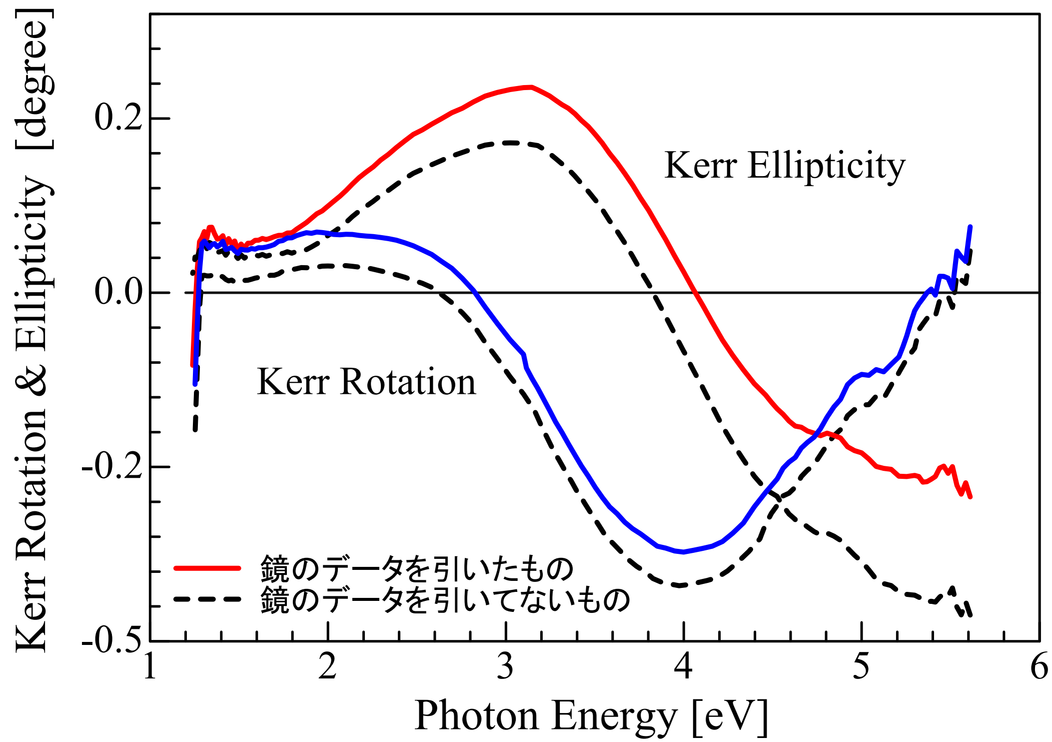


図 2.10　旋光分散（実線）と円二色性分散（点線）

クラマース・クローニヒの関係式の例

- 右図は、佐藤研で測定したネオジム磁石($NdFe_2B_{14}$)の磁気カー効果のスペクトルである。
- Rotation(回転)のピーク位置はEllipticity(楕円率=円二色性に比例)のS字曲線の中心付近に来る。



光学活性の分類

- 物質本来の光学異方性による光学活性を「自然活性」とよびます。
- 電界あるいは電気分極によって誘起される光学活性を電気光学(EO)効果といいます。
  - ポッケルス効果、電気光学カー効果があります。
- 磁界あるいは磁化によって誘起される光学活性を磁気光学(MO)効果といいます。
- 応力による光学活性をピエゾ光学効果または光弾性といいます。

非磁性体のファラデー効果

- ガラス棒にコイルを巻き電流を通じるとガラス棒の長手方向に磁界ができます。このときガラス棒に直線偏光を通すと磁界の強さとともに偏光面が回転する。この磁気旋光効果を発見者Faradayに因んでファラデー効果といいます。
- 光の進行方向と磁界とが同一直線上にあるときをファラデー配置といい、進行方向と磁界の向きが直交するような場合を、磁気複屈折を発見したVoigtに因んでフォークト配置といいます。

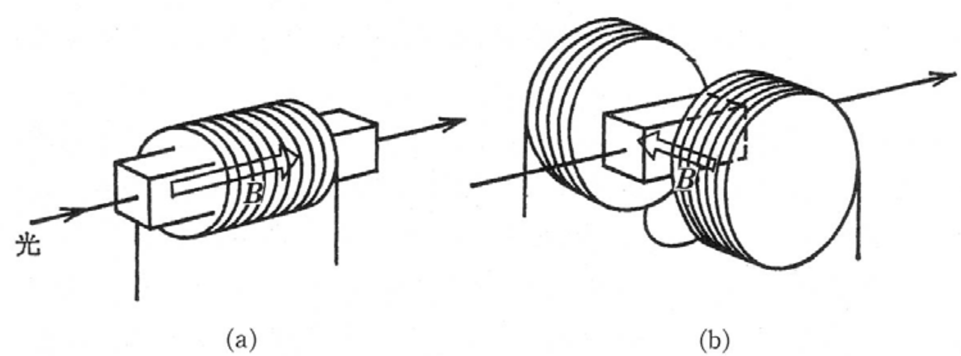
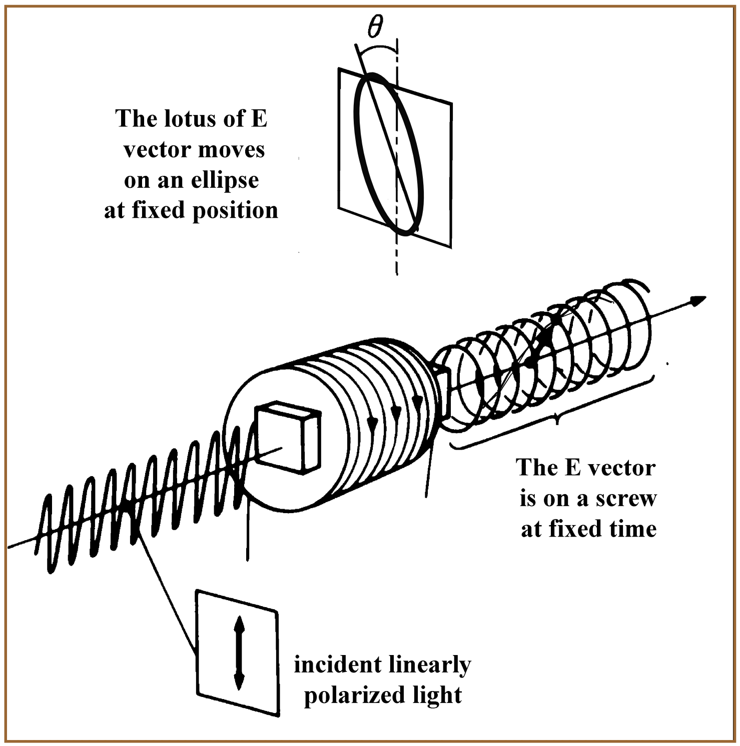
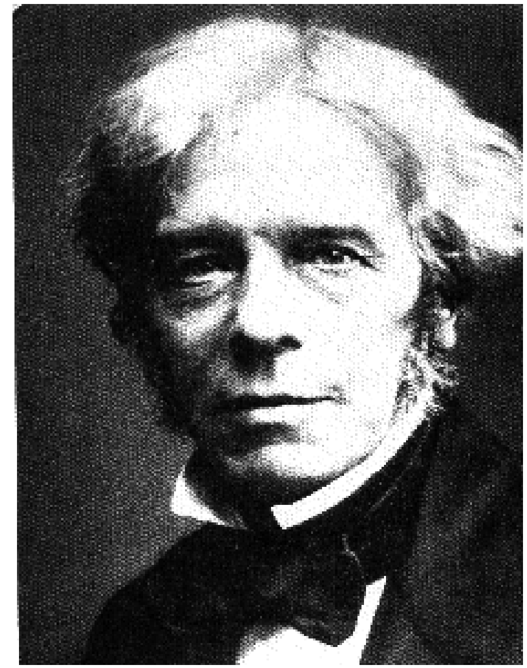


図 2.5 ファラデー配置 (a) とフォークト配置 (b)

ファラデー効果

- ファラデー配置において直線偏光が入射したとき出射光が楕円偏光になり、その主軸が回転する効果です。





M. Faraday (1791-1867)

ヴェルデ定数

- 強磁性を示さない物質の磁気旋光角をθ_F、磁界を$\boldsymbol{H}$、光路長$\boldsymbol{l}$とすると、

$$\theta_F = VlH$$

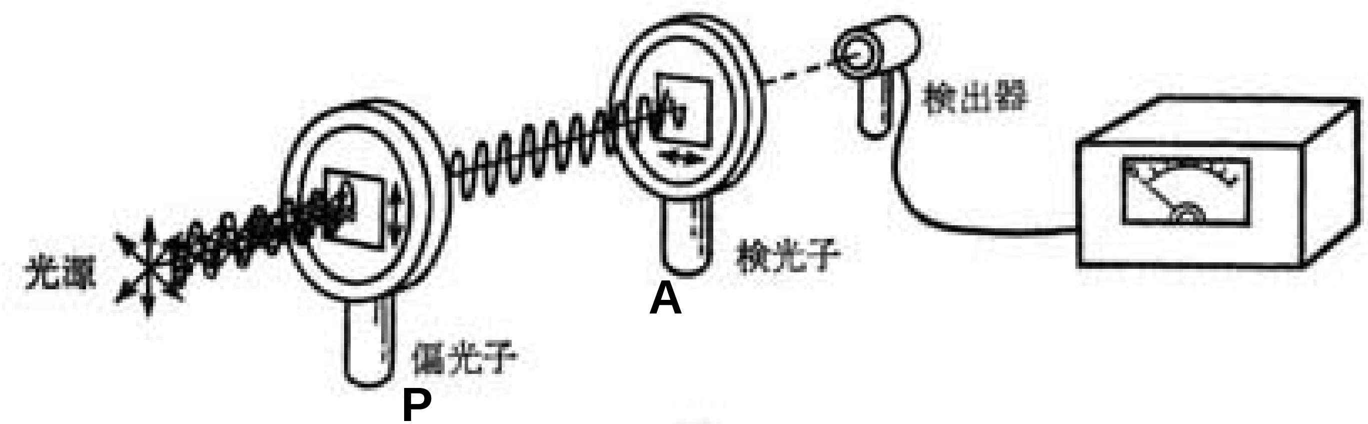
と表される。V はベルデ(Verdet)定数と呼ばれ、物質固有の比例定数である。

ヴェルデ定数一覧表　λ=546.1nm　理科年表による

物質	V [min/A]	物質	V [min/A]
酸素	7.598×10^{-6}	NaCl	5.15×10^{-2}
プロパン	5.005×10^{-5}	ZnS	2.84×10^{-1}
水	1.645×10^{-2}	クラウンガラス	2.4×10^{-2}
クロロホルム	2.06×10^{-2}	重フリントガラス	1.33×10^{-1}

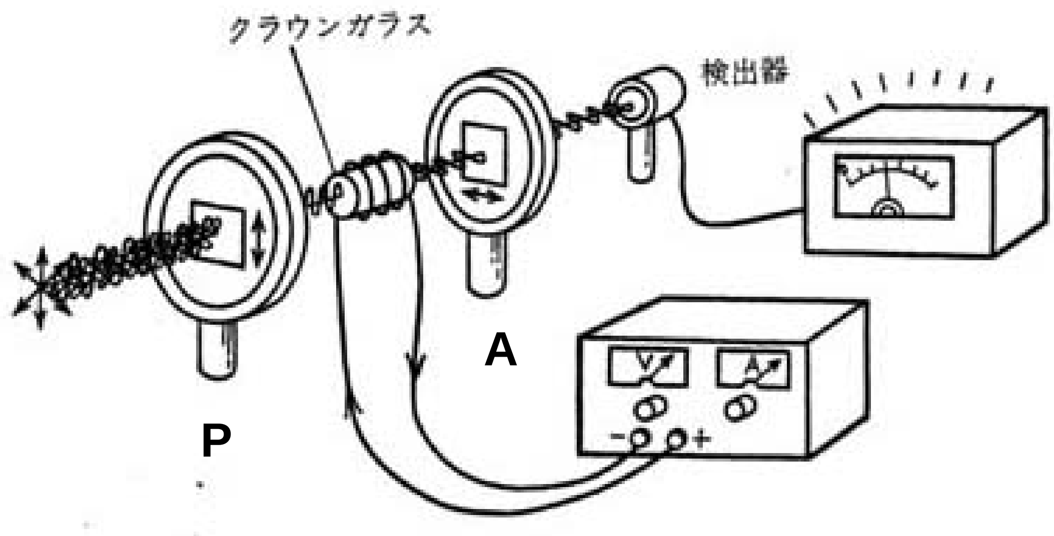
直交偏光子

- 偏光子Pと検光子Aを互いに偏光方向が垂直になるようにしておきます 。（クロスニコル条件）
- この条件では光は通過しません。



ファラデー効果による光スイッチ

- クロスニコル状態の偏光子Pと検光子Aの間に長さ0.23 mのクラウンガラスの棒を置き10^6 A/m(～1.3T)の磁界をかけたとすると、ガラス中を通過する際にほぼ90゜振動面が回転して検光子Aの透過方向と平行になり光がよく通過する。



(b)

ファラデー効果と自然旋光性のちがい

- ファラデー効果においては磁界を反転すると逆方向に回転が起きます。つまり回転角は磁界の方向に対して定義されている。一方、自然旋光性は回転が光の進行方向に対して定義されています。
- 図2.7に示すように、ブドウ糖液中を光を往復させると戻ってきた光は全く旋光していないが、磁界中のガラスを往復した光は、片道の場合の2倍の回転を受けます。

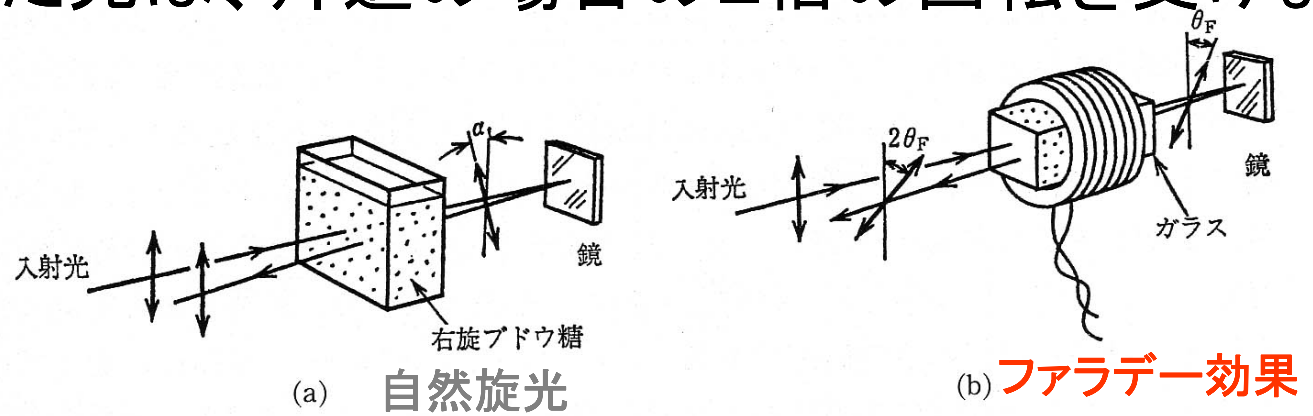


図 2.7 ファラデー効果の場合
ブドウ糖液中を往復した光は旋光しないが (a), 磁界中のガラスを往復した光は片道の 2 倍だけ旋光している (b).

強磁性体のファラデー効果

- ガラスのファラデー効果に比べ、強磁性体、フェリ磁性体は非常に大きなファラデー回転を示します。
- 飽和磁化状態の鉄のファラデー回転は1cmあたり380,000°に達します。強磁性体のファラデー回転角の飽和値は物質定数です。
  - 1cmもの厚さの鉄ではもちろん光は透過しませんが薄膜を作ればファラデー回転を観測することが可能です。例えば30 nmの鉄薄膜では光の透過率は約70 %で、回転角は約1°となります。

代表的な磁性体のファラデー効果

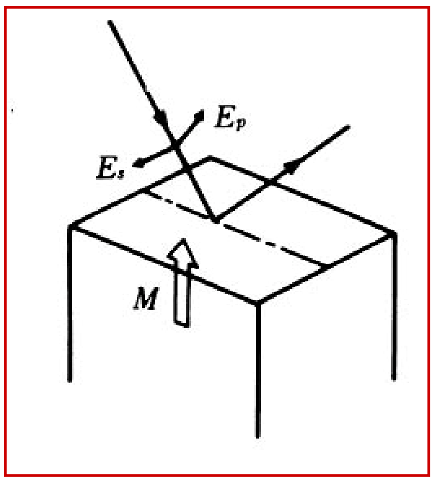
物質名	旋光角 (deg/cm)	性能指数 (deg/dB)	測定波長 (nm)	測定温度 (K)	磁界 (T)
Fe	$3.825\cdot10^5$		578	室温	2.4
Co	$1.88\cdot10^5$		546	〃	2
Ni	$1.3\cdot10^5$		826	120 K	0.27
$Y_3Fe_5O_{12}$*	250		1150	100 K	
$Gd_2BiFe_5O_{12}$	$1.01\cdot10^4$	44	800	室温	
MnSb	$2.8\cdot10^5$		500	〃	
MnBi	$5.0\cdot10^5$	1.43	633	〃	
$YFeO_3$	$4.9\cdot10^3$		633	〃	
$NdFeO_3$	$4.72\cdot10^4$		633	〃	
$CrBr_3$	$1.3\cdot10^5$		500	1.5K	
EuO	$5\cdot10^5$	104	660	4.2 K	2.08
CdC_r2S_4	$3.8\cdot10^3$	35(80K)	1000	4K	0.6

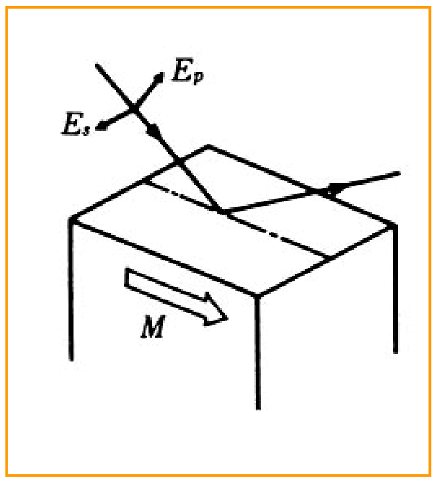
磁気カー効果

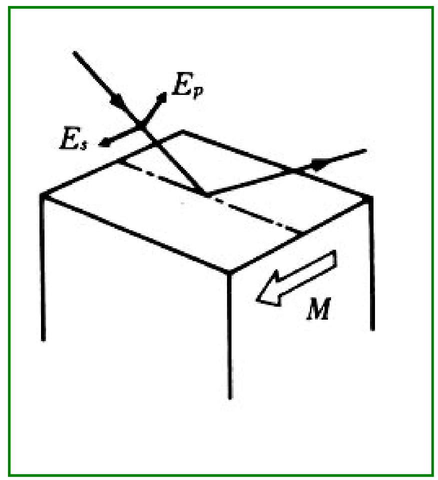
- 磁気カー効果は、反射光に対するファラデー効果ということができます。カー(Kerr)という人は電気光学効果の研究でも有名で一般にカー効果というと電気光学効果のほうをさすことが多いので区別のため磁気カー効果と呼んでいます。
- 英語ではMagneto-optical Kerr Effect: MOKEと呼びます。

磁気カー効果

- MO-Kerr 効果には、3種類があります。
  - 極カー効果（磁化が反射面の法線方向、直線偏光は傾いた楕円偏光となる）
  - 縦カー効果（磁化が試料面内＆入射面内、直線偏光は傾いた楕円偏光となる）
  - 横カー効果（磁化が試料面内、入射面に垂直偏光の回転はないが磁界による強度変化）







代表的な磁性体のカー回転角

物質名	カー回転角 (deg)	測定光エネルギー (eV)	測定温度 (K)	磁界 (T)
Fe	0.87	0.75	室温	
Co	0.85	0.62	〃	
Ni	0.19	3.1	〃	
Gd	0.16	4.3	〃	
Fe_3O_4	0.32	1	〃	
MnBi	0.7	1.9	〃	
CoS_2	1.1	0.8	4.2	0.4
$CrBr_3$	3.5	2.9	4.2	
EuO	6	2.1	12	
$USb_{0.8}Te_{0.2}$	9.0	0.8	10	4.0
$CoCr_2S_4$	4.5	0.7	80	
a-GdCo *	0.3	1.9	298	
PtMnSb	2.1	1.75	298	1.7

磁気光学スペクトル

- 磁気旋光（ファラデー回転、カー回転）に限らず一般に旋光度は、光の波長に大きく依存する。旋光度の波長依存性を化学の分野では旋光分散（optical rotatory dispersion；ORD）と呼んでいます。物理の言葉では旋光スペクトルといいます。
- 旋光度や円二色性は物質が強い吸光度を示す波長領域で最も大きく変化します。これを化学の方では異常分散と称します。
  – 何が異常かというと、一般に吸収のない波長では旋光度は波長の二乗に反比例して単調に変化するのに対し、特定の波長でピークを持ったり、微分波形を示したりするからです。

磁気光学ヒステリシスループの波長依存性

- 右の図はいくつかの測定波長におけるアモルファスGdCo薄膜のカー効果のヒステリシス曲線です。
- この図を見るとヒステリシスループの高さばかりでなく、その符号までが波長とともに変ることが分ります。
- なぜ磁気光学で測定したヒステリシスは波長によって大きさが変わったり反転したりすることがあるのでしょうか？

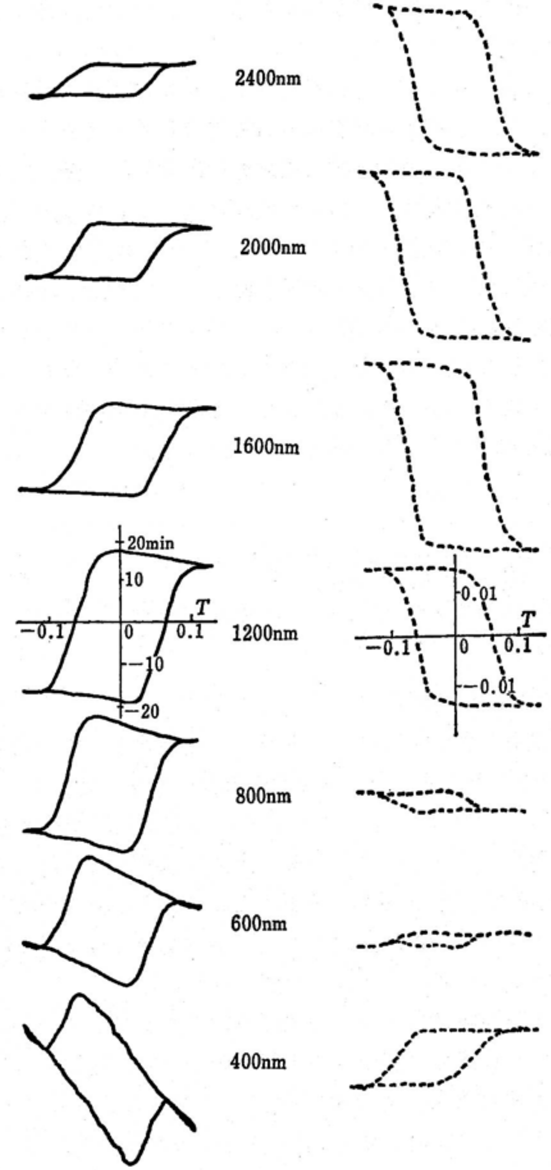


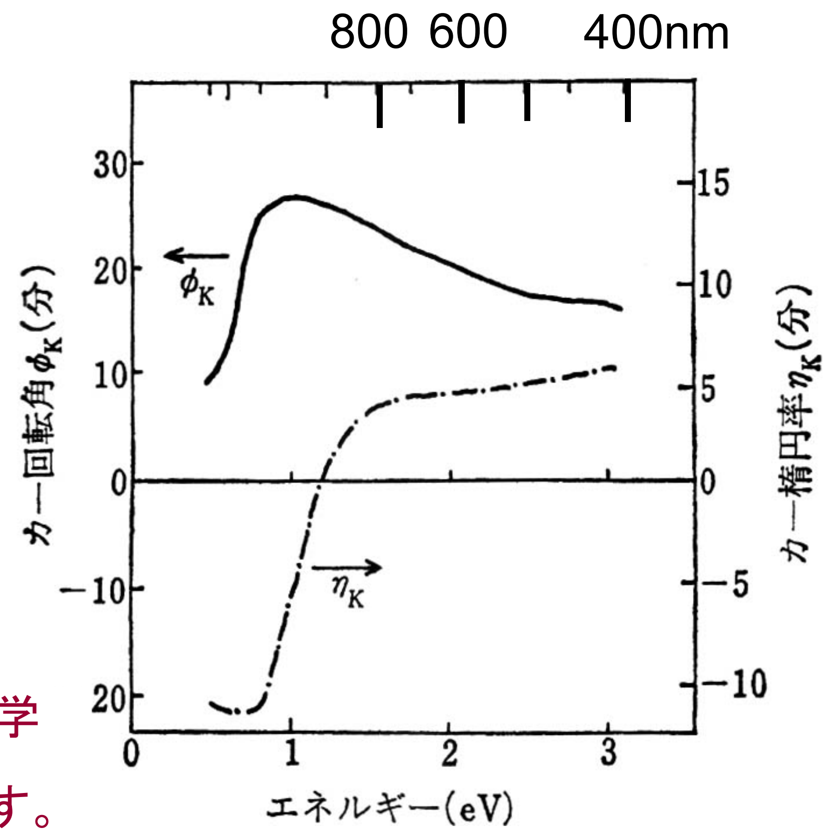
図 2.11　アモルファス GdCo（ガドリニウムコバルト）薄膜におけるカー効果のヒステリシス曲線の波長依存性（基板側から測定したもの）[24]

左側はカー回転角，右側は磁気円二色性（カー楕円率に相当）を示す．

GdCoの磁気光学スペクトル

- 図はアモルファスGdCo薄膜の残留磁化におけるカー回転およびカー楕円率を光子のエネルギーEに対してプロットしたスペクトルです。
- 大きさや符号が波長と共に変化することが理解されるでしょう。

●なぜエネルギーを横軸にとるかというと、磁気光学効果スペクトルは、それぞれの物質の電子エネルギー構造に基づいて生じているものであるからです。（光の波長λとエネルギーEの間の関係は、波長λをμm単位として表した場合、EをeV単位としてE＝1.2398/λで与えられます。）



なぜスペクトル測定？

- あとの講義で述べるように、量子力学によれば、磁気光学効果は磁化を持つ物質中での特定の光学遷移の円偏光に対する選択則から生じます。
- このため、磁気光学スペクトルは物質の電子構造を反映するのです。
- 逆に、電子構造を調べる手段として磁気光学効果を用いることもできるのです。

１のまとめ

この講義では、次のことを学びました。

- 偏光には直線偏光･円偏光楕円偏光があること
- 旋光性と円二色性をあわせて光学活性ということ
- 磁界(または磁化)がある場合の光学活性を磁気光学効果ということ
- 磁気光学効果にはファラデー効果、磁気カー効果があること
- 磁気光学効果を使って光をスイッチしたり、磁気ヒステリシスを測定したりすることができること
- 磁気光学効果の大きさや符号は、波長（または光子エネルギー）に依存すること

2　磁気光学効果は何に応用されているか

- 光で磁気を見る
  - ファラデー効果で磁化曲線を測る
  - ファラデー効果で磁区を見る
  - ●光磁気記録（記録情報の読み出し）
- 光で磁気を測る
  - 電流磁界センサ
- 磁気で光を制御する
  - 光アイソレータ（光通信における方向性結合）
  - 空間光変調器(光画像処理)

光で磁気を見る

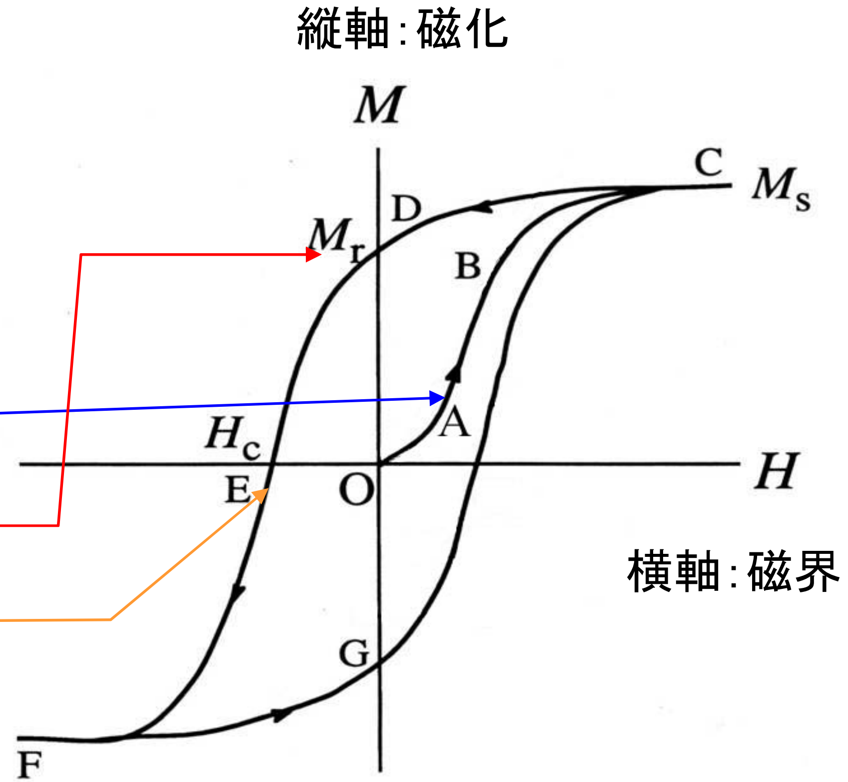
- ファラデー効果で磁化曲線を測る
- ファラデー効果で磁区を見る
- 光磁気記録（記録情報の読み出し）

ファラデー効果で磁化曲線を測る

- 強磁性体では旋光角は物質定数ですが、磁気的に飽和していない場合には、巨視的な磁化に関係する量となるので、ファラデー効果を用いて磁化曲線を測ることができます。
- ファラデー効果は磁化ベクトルと光の波動ベクトルとが平行なとき最大となり、垂直のとき最小となります。すなわち，磁化と波動ベクトルのスカラー積に比例するのです。
- 測定に使う光のスポット径が磁区よりも十分大きければ近似的にいくつかの磁区の平均の磁化の成分を見ることになるので磁化曲線を測定できるのです。

磁気ヒステリシス

- 強磁性体においては、その磁化は印加磁界に比例せず、ヒステリシスを示します。
  - O→B→C:**初磁化曲線**
  - C→D: **残留磁化**
  - D→E: **保磁力**
  - C→D→E→F→G→C: ヒステリシスループ

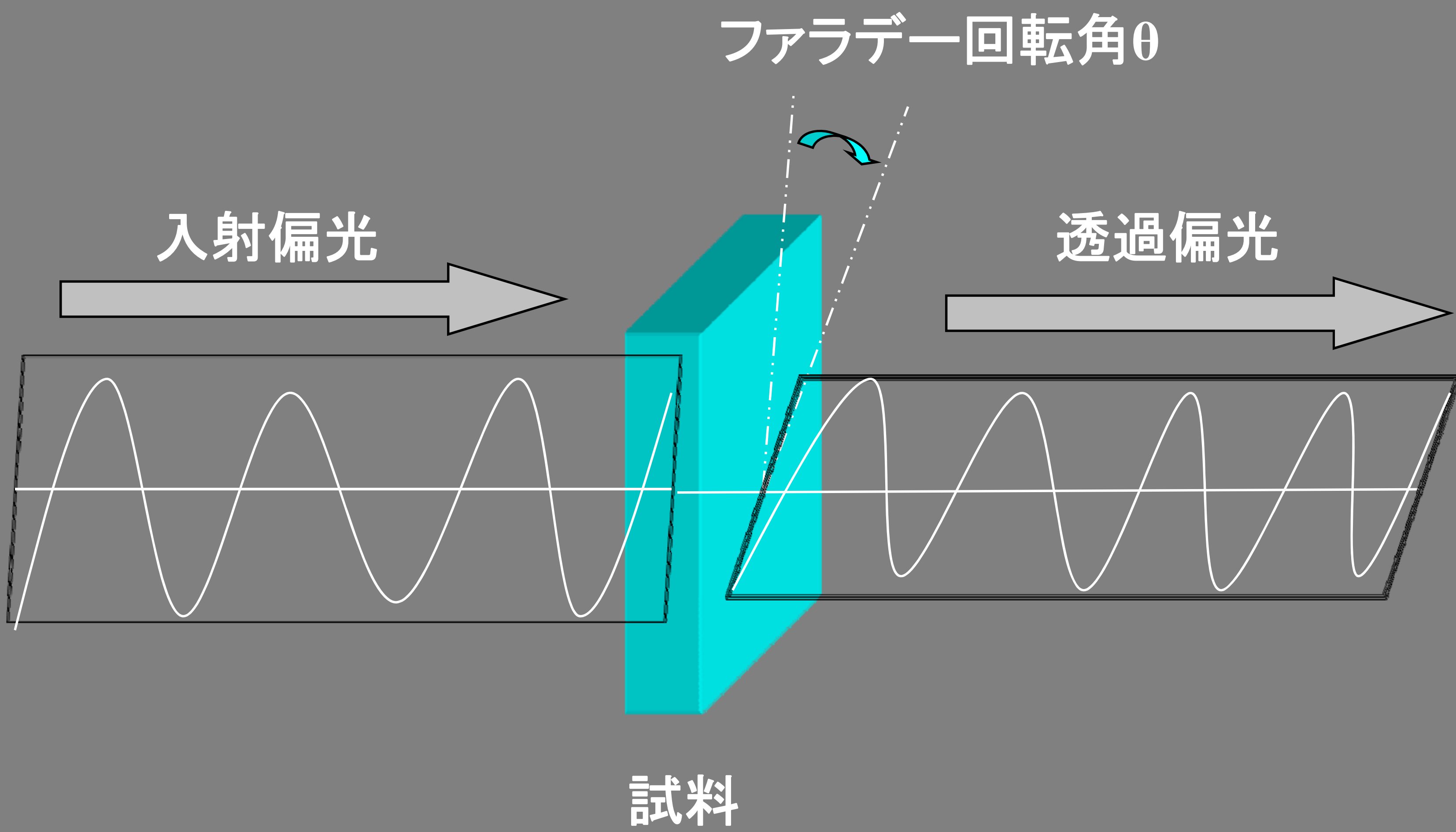


(高梨：初等磁気工学講座テキスト)

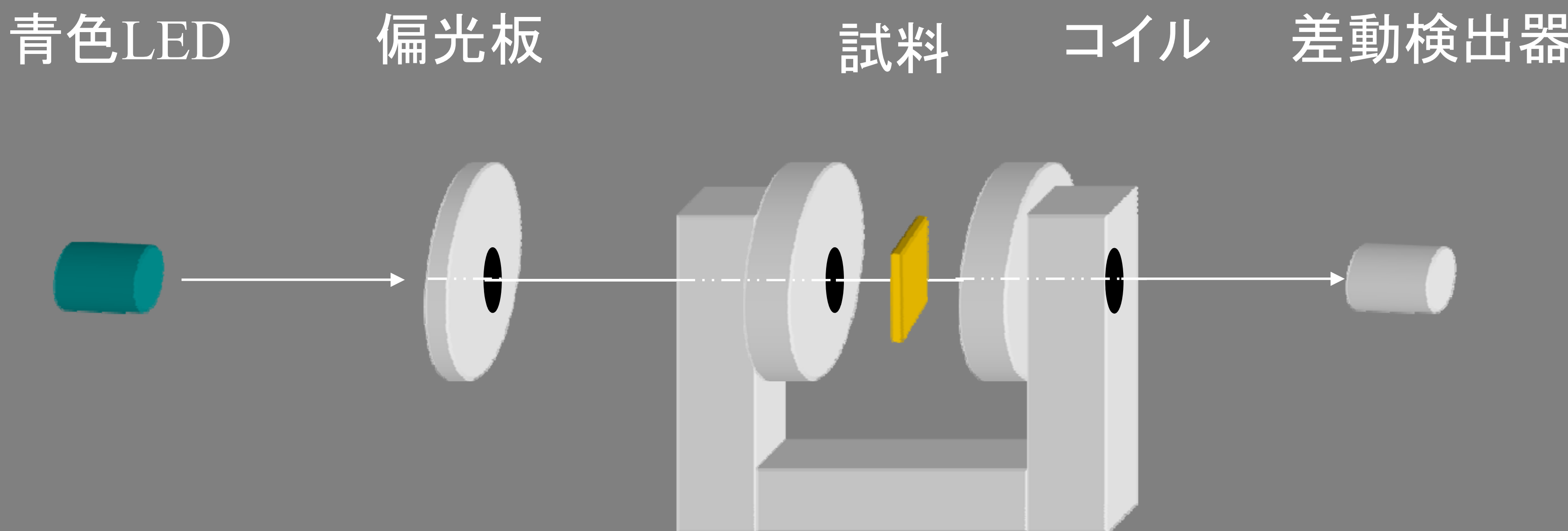
ファラデー効果による磁化曲線測定

- ここには、YIG:Bi薄膜の磁気光学効果を用いてヒステリシス曲線を測定する実験を紹介し、磁化の反転を光で検出できることを示しましょう。
- 光磁気ディスクやミニディスクでは、これと同じ原理を使って、磁気記録された情報を読み出しているのです。

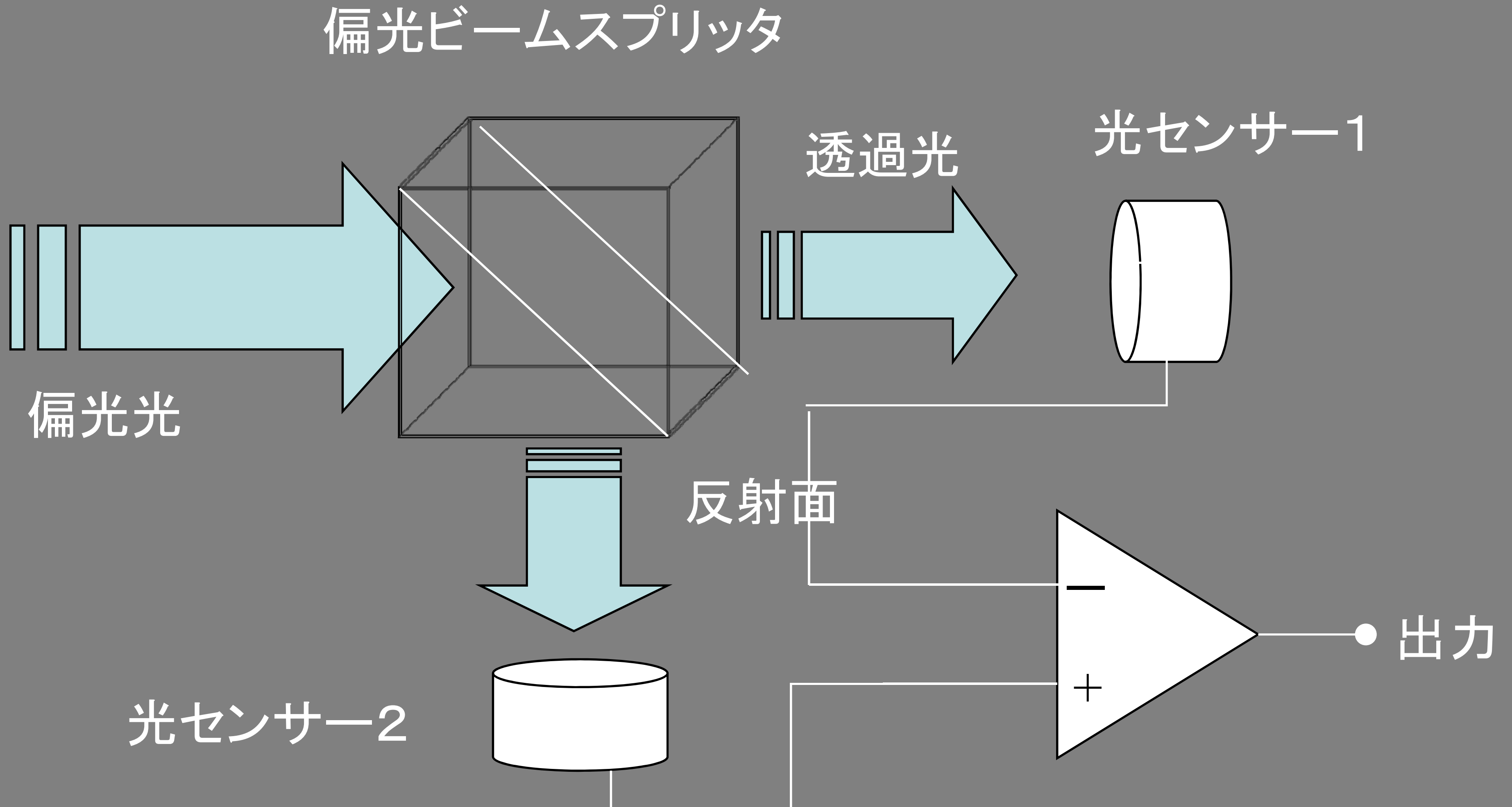
原理

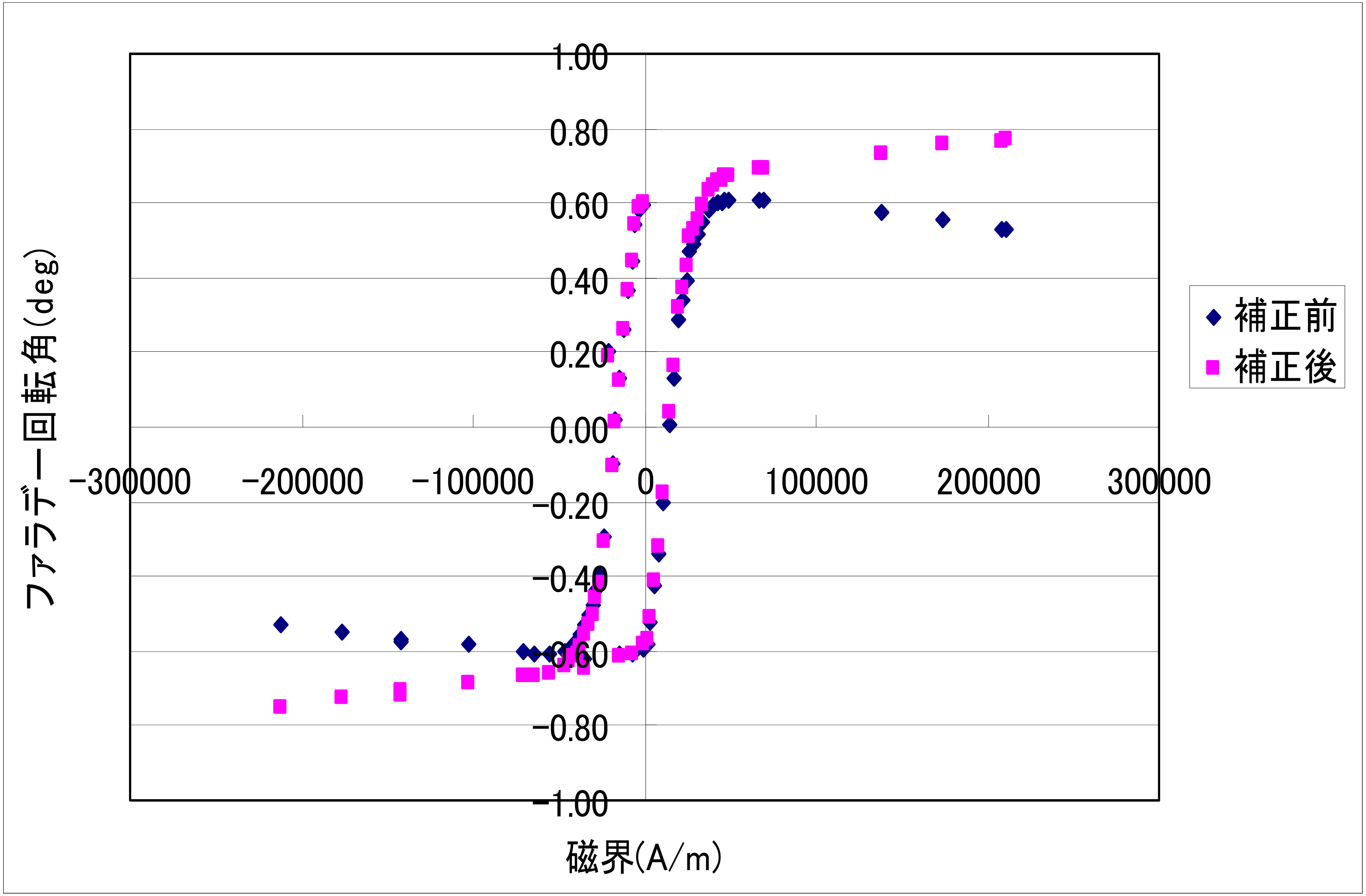


装置



差動検出器の説明





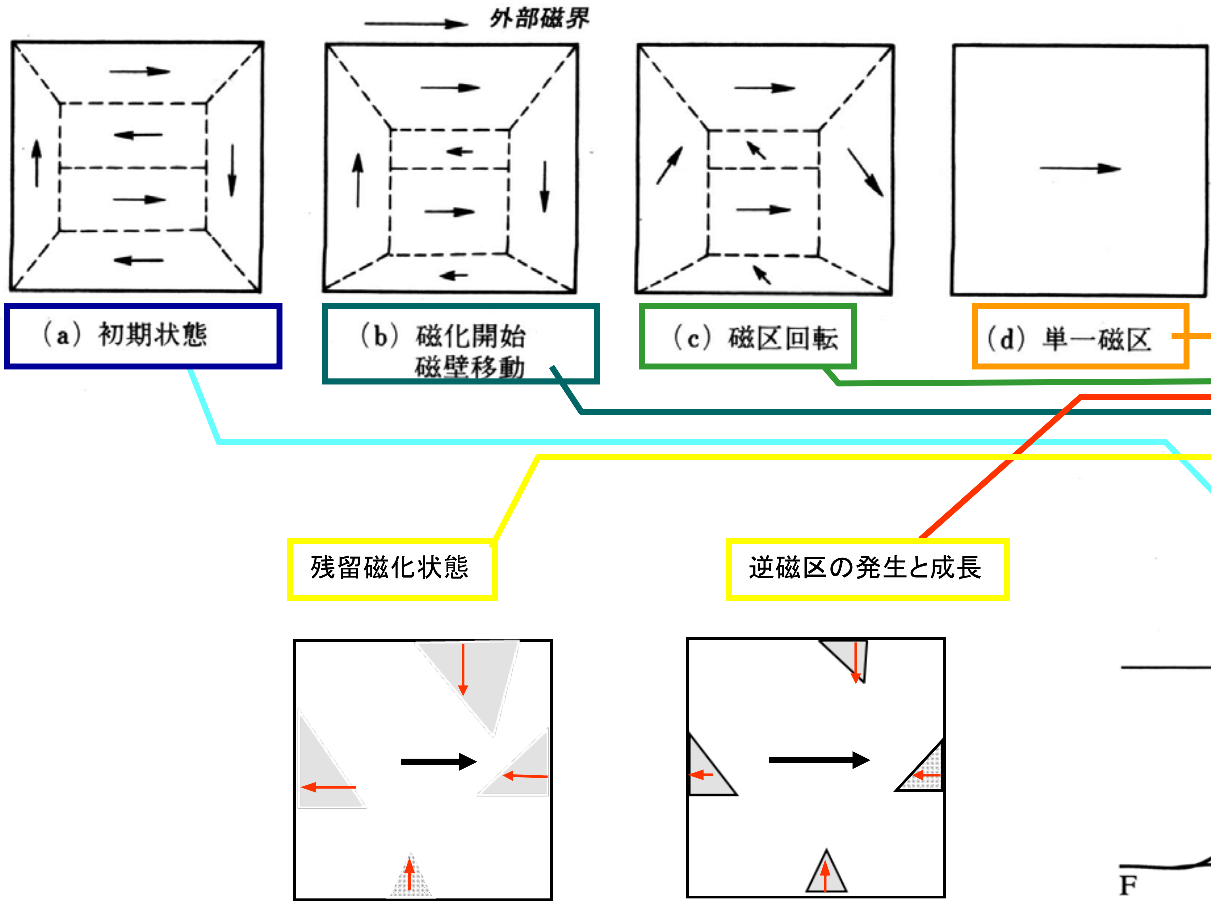
ファラデー効果のヒステリシス曲線

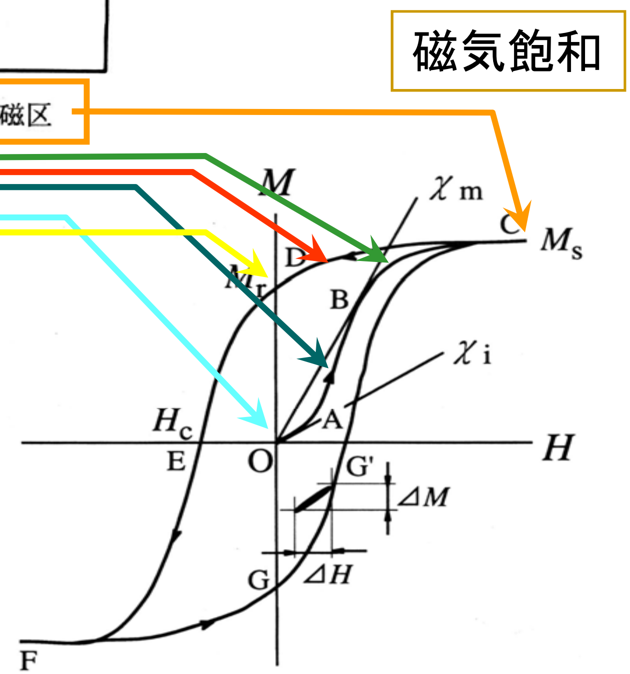
ファラデー効果で磁区を見る

- 測定に使う光のスポット径が磁区よりも十分小さければ、磁区の磁化の向きを光の強弱に変えて画像として観測することができます。
- ただし、面に垂直な磁化の成分のみを捉えることが出来ます。

ヒステリシスと磁区

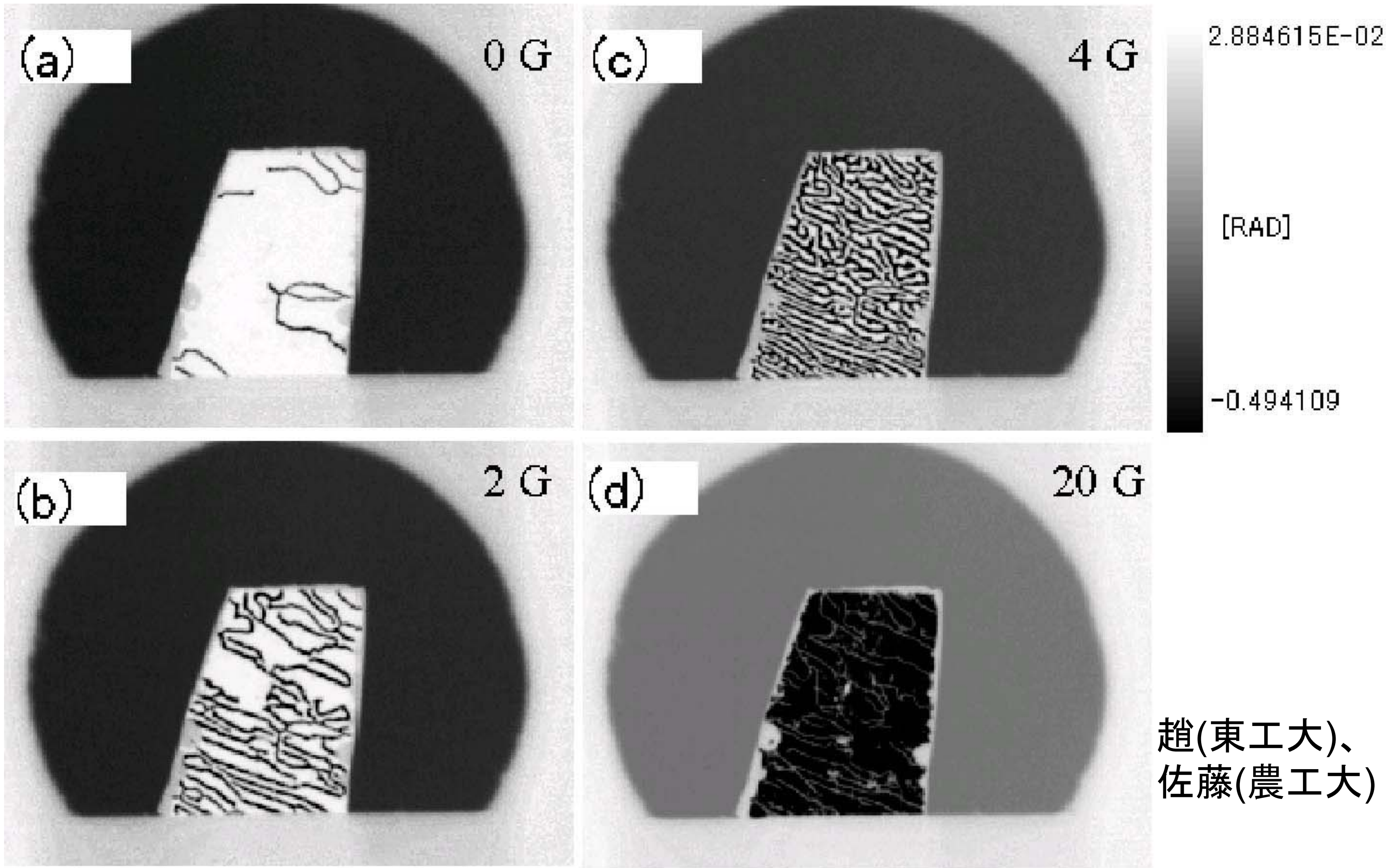
- ヒステリシスは、磁性体の磁区（磁化のそろった領域）に分かれることから生じています。





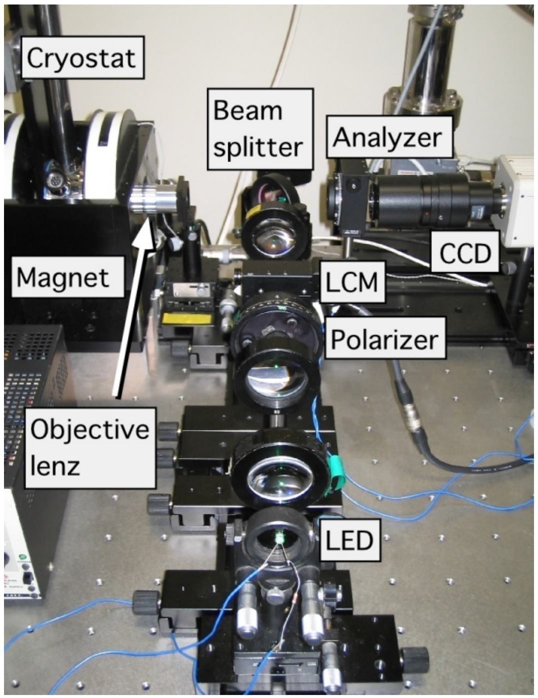
核発生

磁気光学効果で磁区を見る
（ Bi置換磁性ガーネット薄膜）

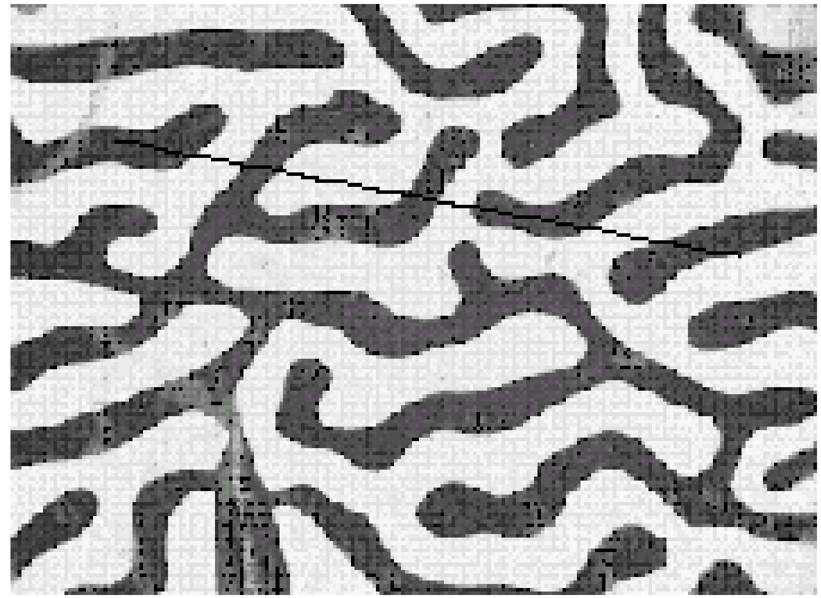


趙(東工大)、
、佐藤(農工大)

ファラデー効果を用いた磁区のイメージング



佐藤研で開発した
円偏光変調方式
磁気光学顕微鏡

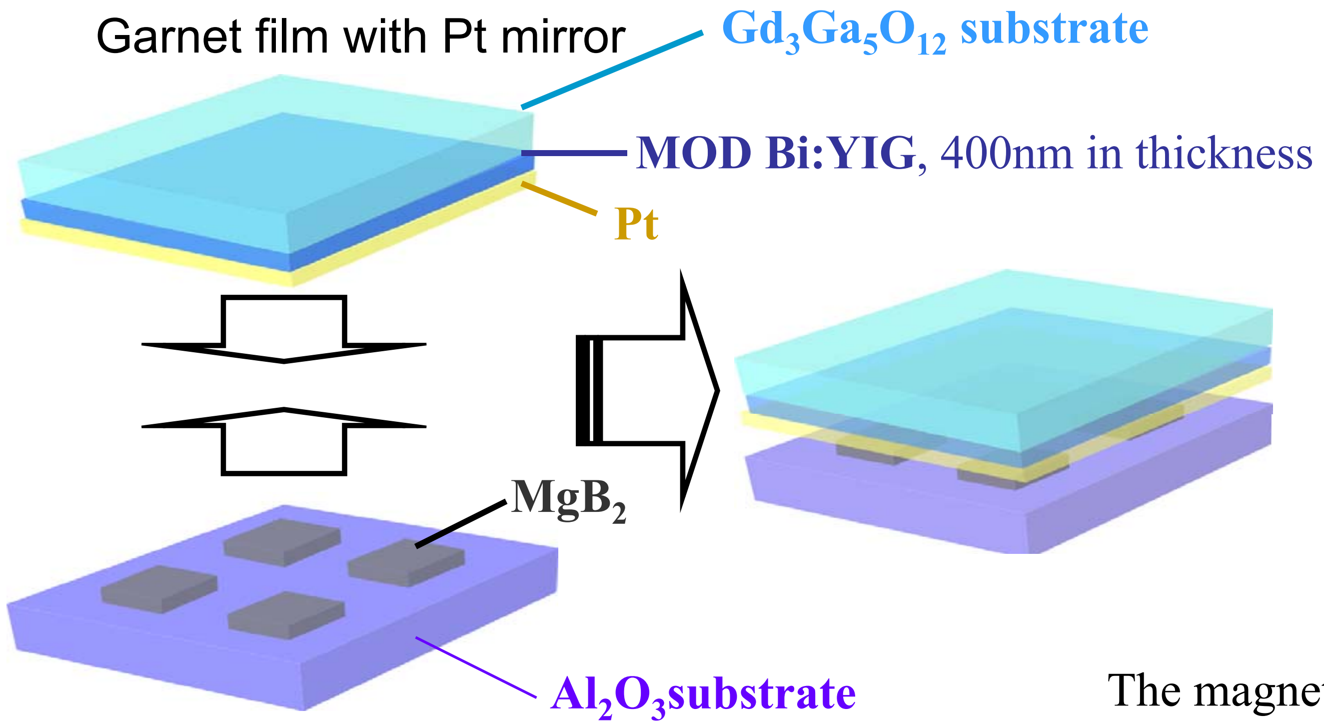


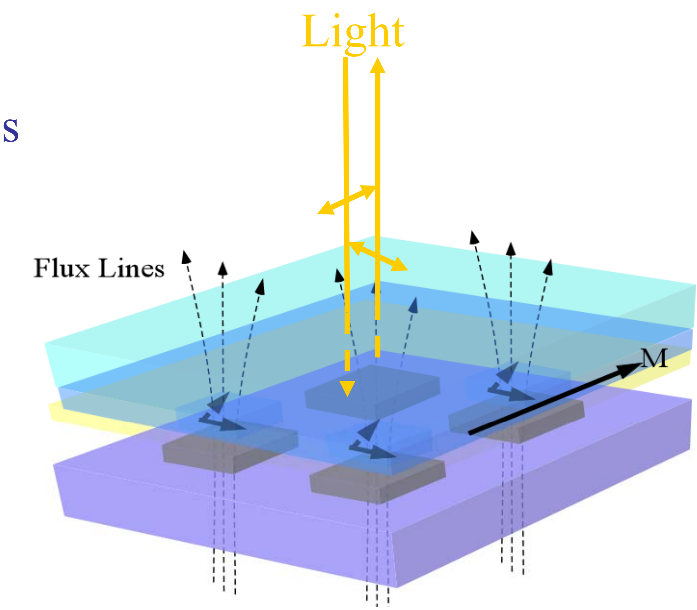
ファラデー効果で観察した
磁性ガーネット薄膜の磁区像

4. Magnetic imaging

(1) Superconducting film

Sample setups





MgB_2 pattern

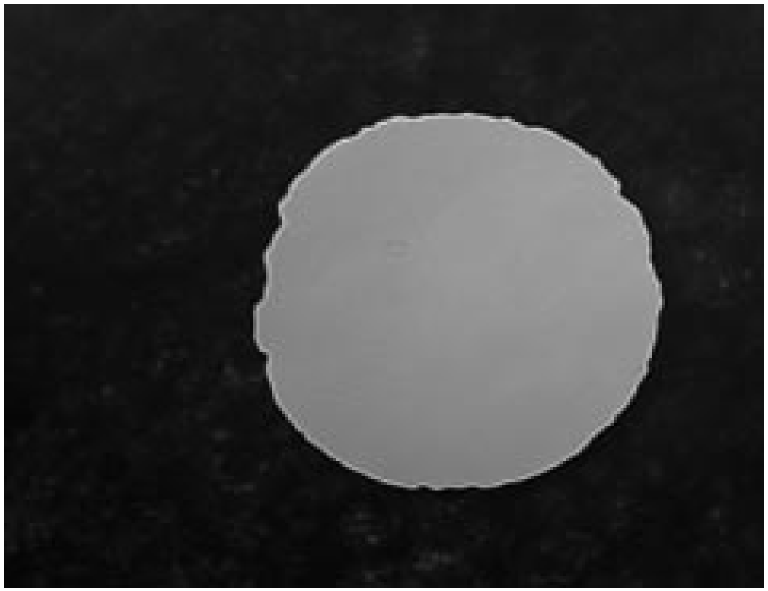
Prepared by MBE
Patterned by photolithography
thickness:100nm
T_c～30K

The magnetic flux intruding into the superconductor is transferred to the indicator film, The perpendicular component of the magnetization is observed by Faraday effect.

Magneto-optical image

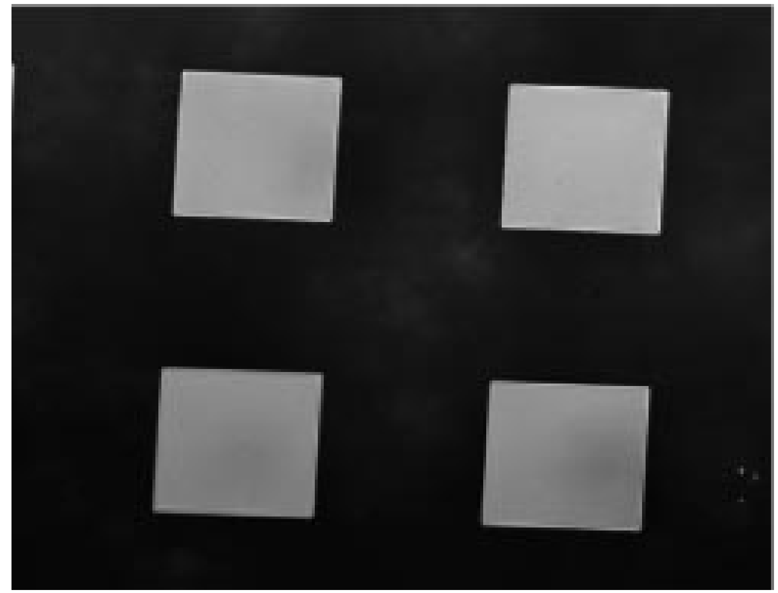
Patterned MgB_2 film

Grown by NTT research lab.



0.3 mm

Circle pattern
Diameter: 0.5mm

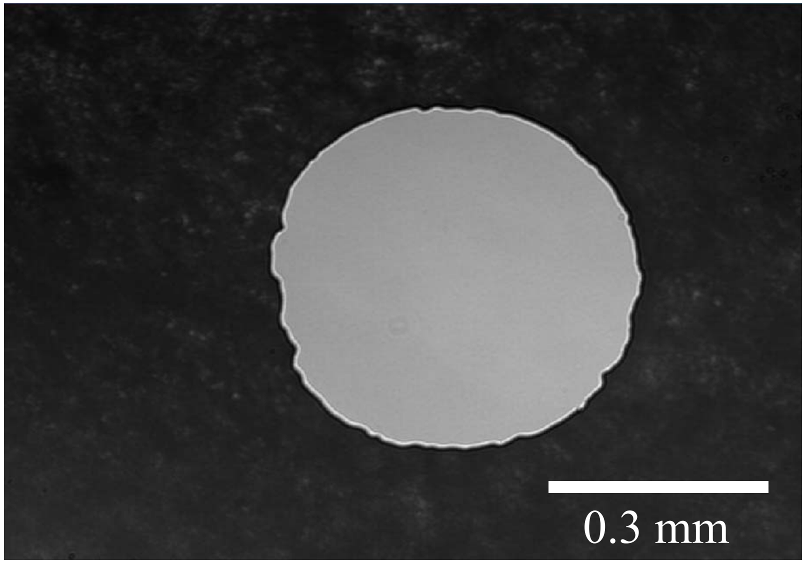


100μm

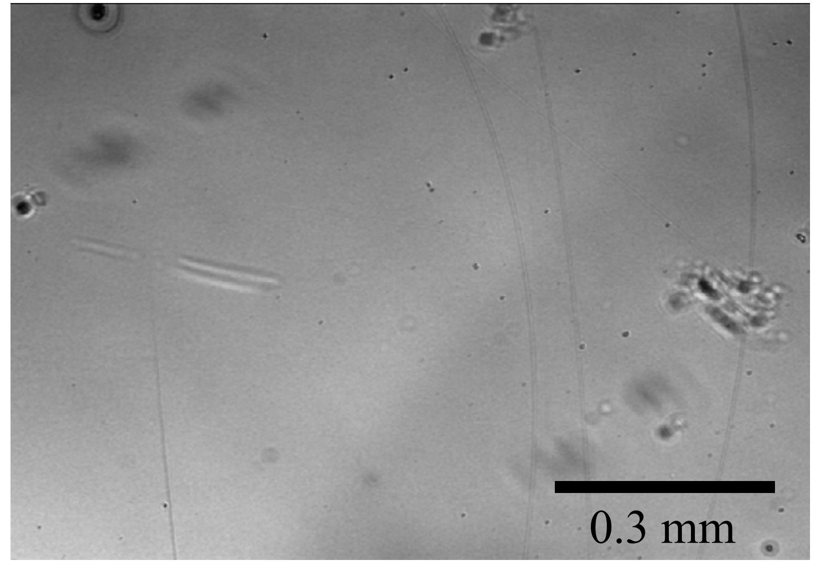
Square pattern
Size: 100μm × 100μm

Optical images

The image from the indicator side prevents direct optical image of circular dot due to Pt-mirror.



Optical image (×5) of MgB_2 pattern(0.5mm ϕ)



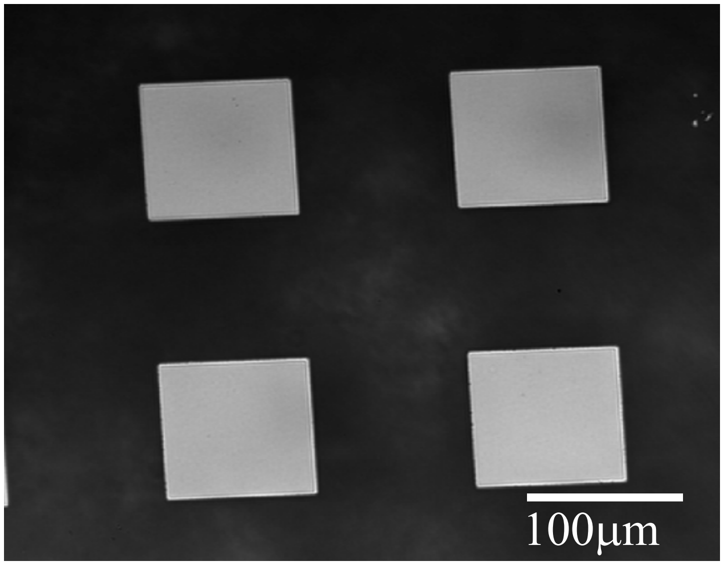
Optical image (×5) from indicator

No direct optical image of MgB_2 pattern is observed due to Pt mirror.

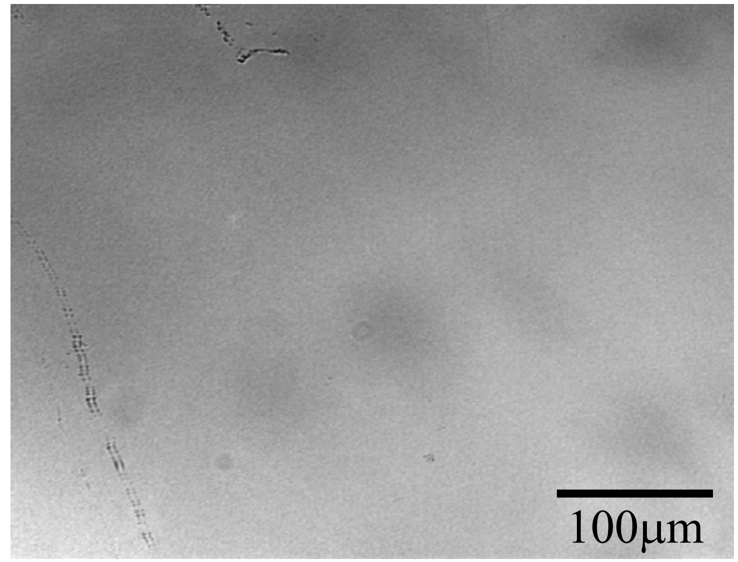
⇩

Only the magnetic fluxes can be visualized.

The image from the indicator side prevents direct optical image of square dots due to Pt-mirror.

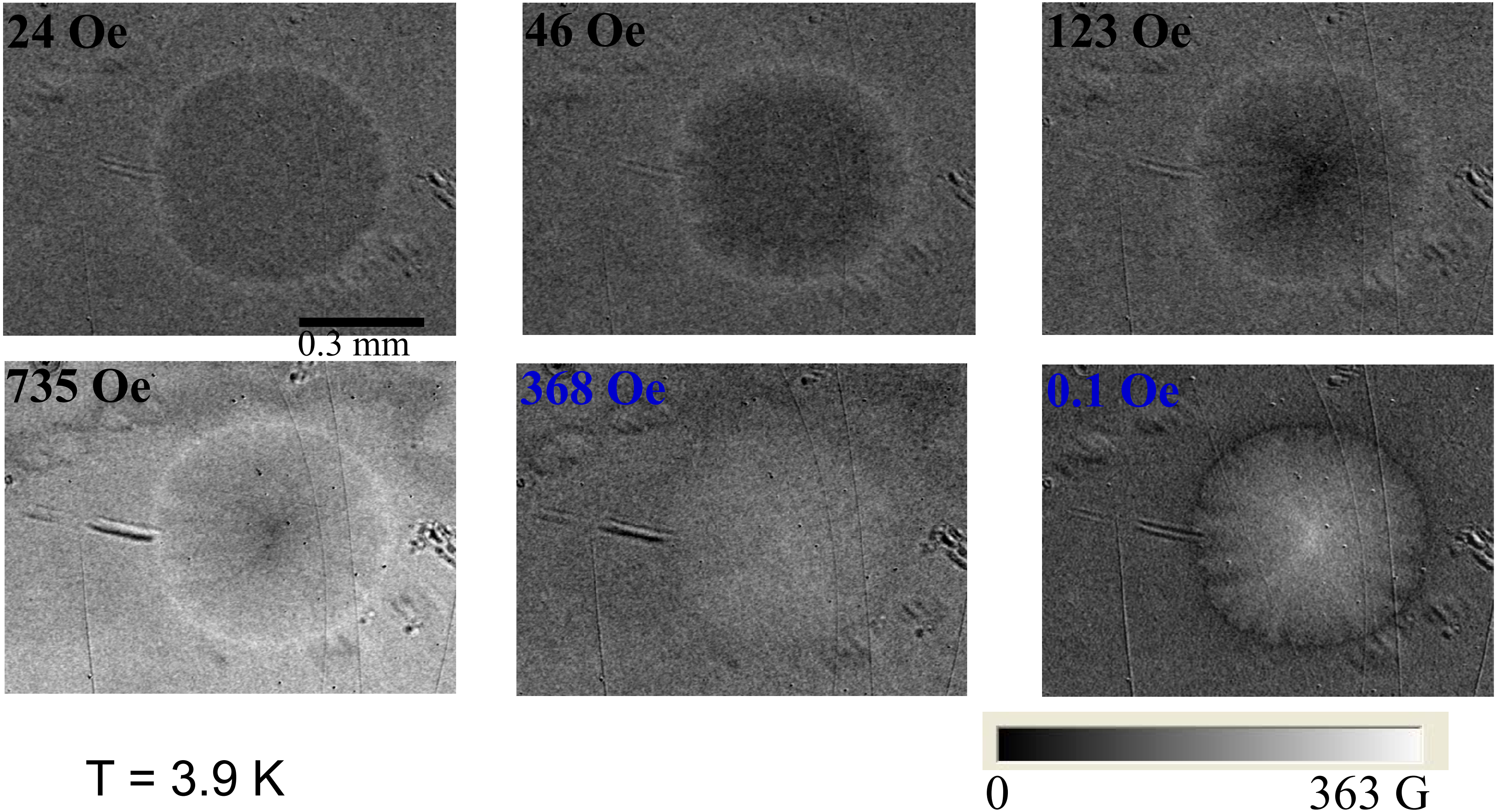


Optical image (×10) of MgB_2 square dots(100μm×100μm)



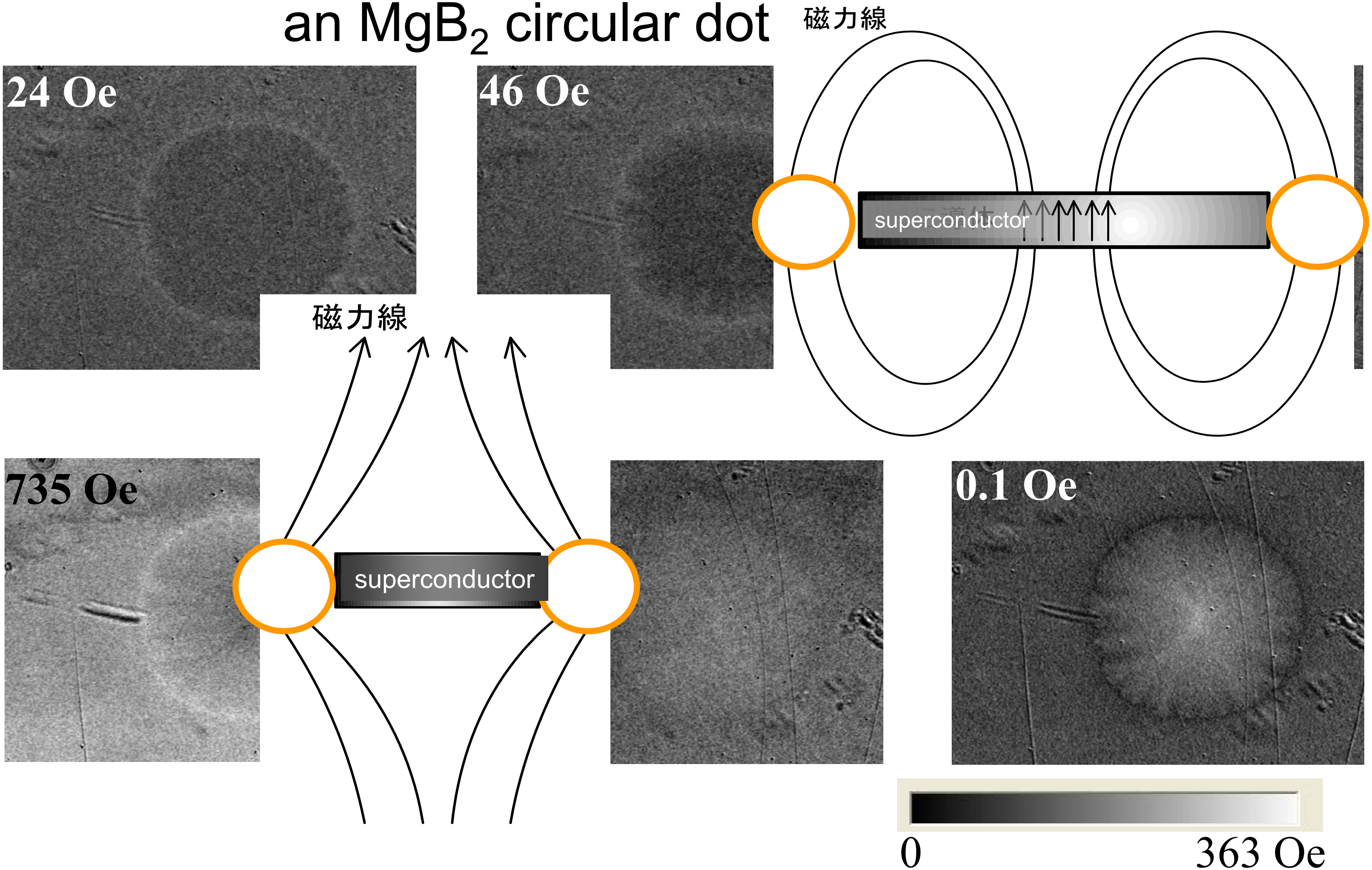
Optical image (×10) after stacking with the indicator.

MO images of 500μm circle

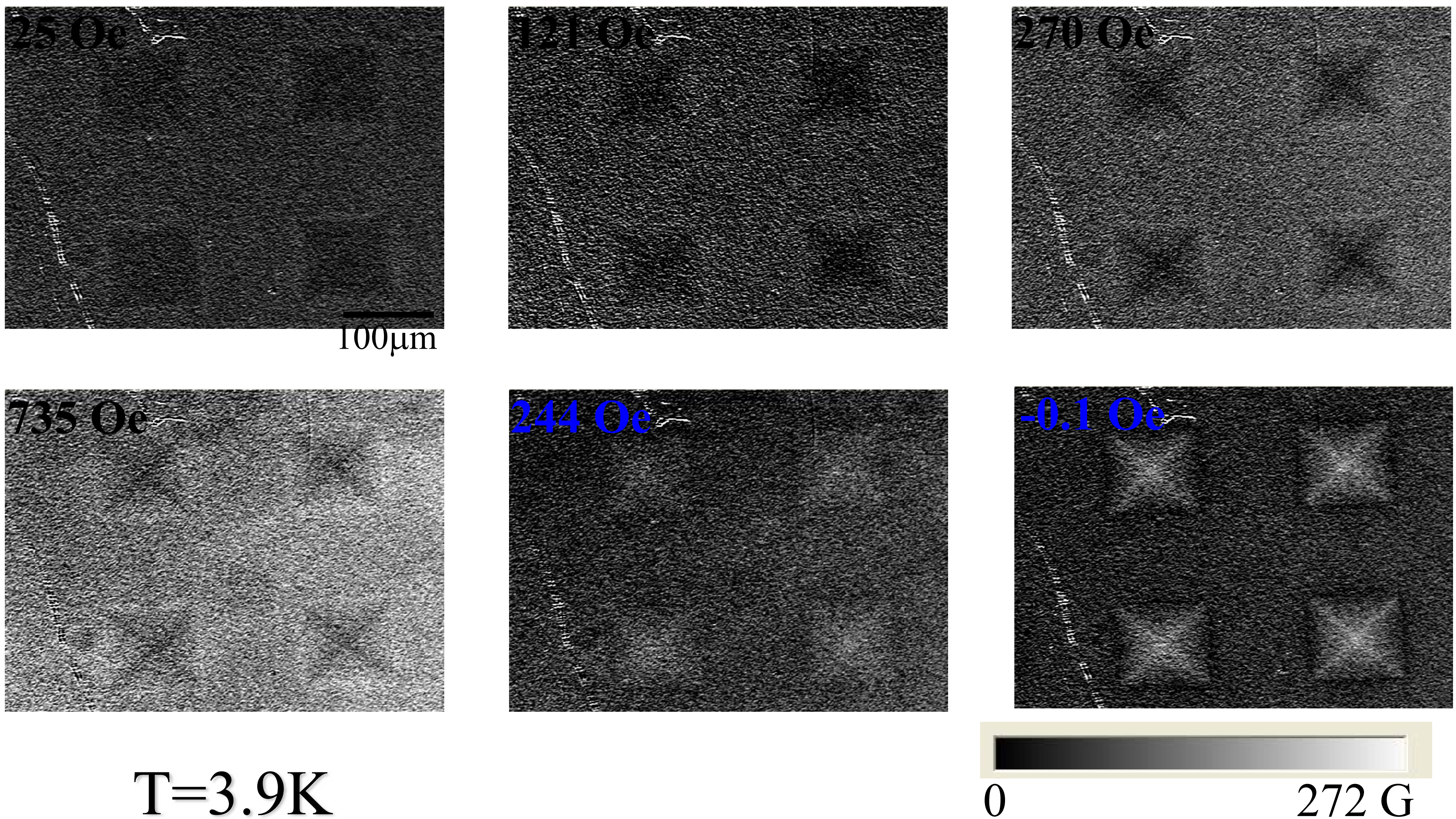


T = 3.9 K

MO images showing intrusion of magnetic fluxes into an MgB_2 circular dot

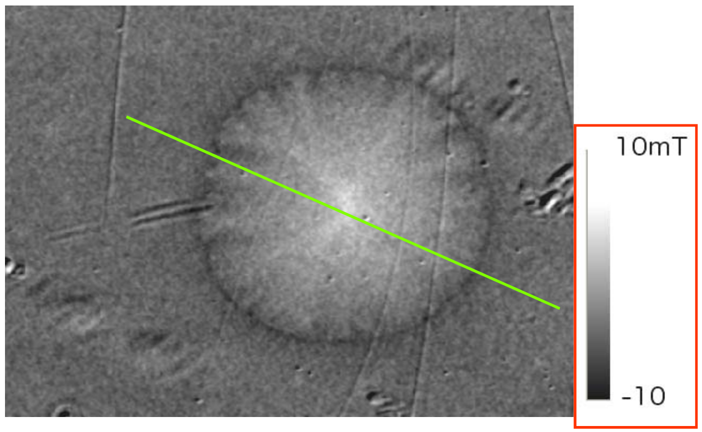


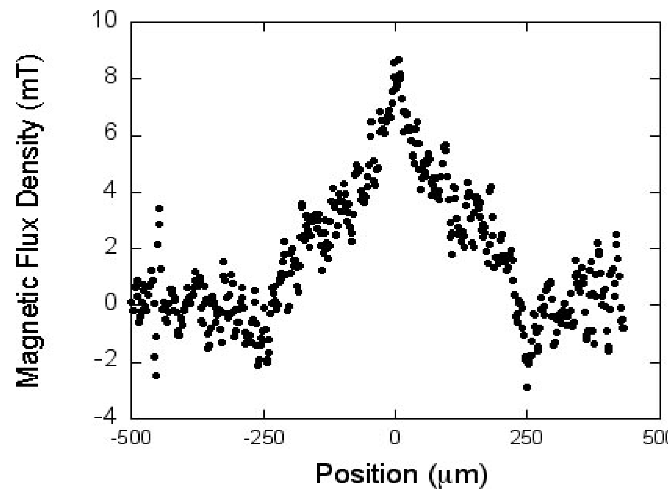
MO images of 100μm square



T=3.9K

Magnetic image





Magnetic image of remanent state after application of Magnetic field of 735 Oe.

Quantitative magnetic image can be obtained from MO image by using linear relation θ_F- B for the MO indicator film.
Therefore, contrast in the image directly shows a magnetic field, B.

MO image of MgB

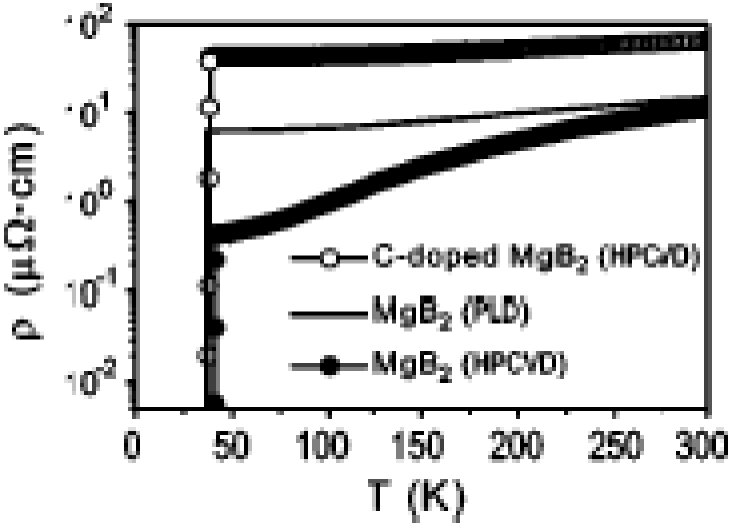
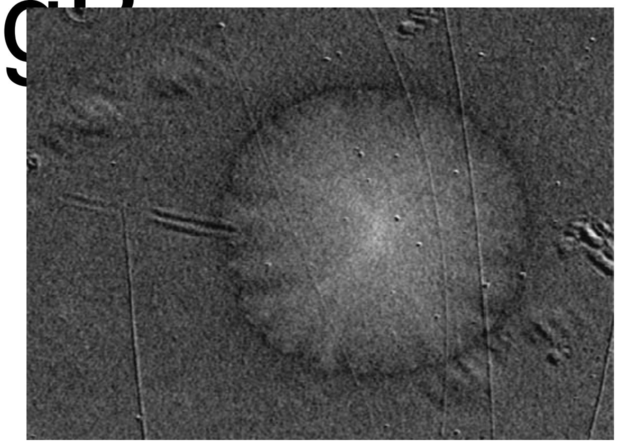


FIG. 4. Temperature dependence of resistivity of the C-doped and ultrapure MgB_2 films plotted along with the pure MgB_2 film made by PLD (Refs. 5 and 16).

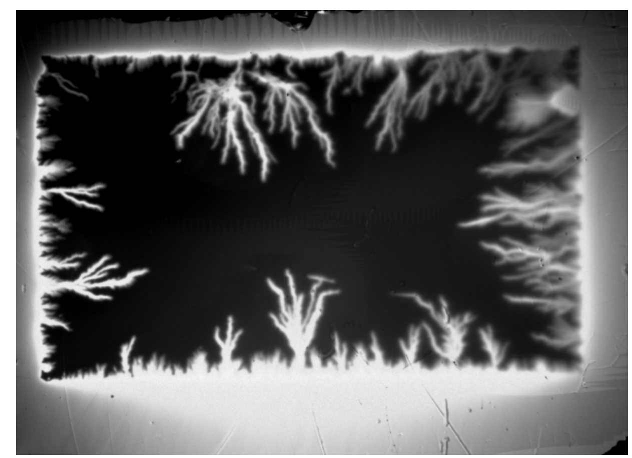
Z. X. Ye et al., APL 85 (2004) 5284.

MBE-grown MgB_2



Present work

PLD-grown MgB_2



Oslo University

How to obtain current distribution from MO images

- Ampére's law

$$\mu_0 \boldsymbol{J} = \Delta \times \boldsymbol{B}$$

It needs all B component, Bx, By, Bz, while MO images measures only Bz.

- Biot-Savart's law

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{(y-y')J_x - (x-x')J_y}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} dx'dy'$$

1) One uses models for current distribution and compare the calculated B with the measured one.
2) One directly inverts by numerical method.

Inversion of Biot-Savart's law using convolution theorem

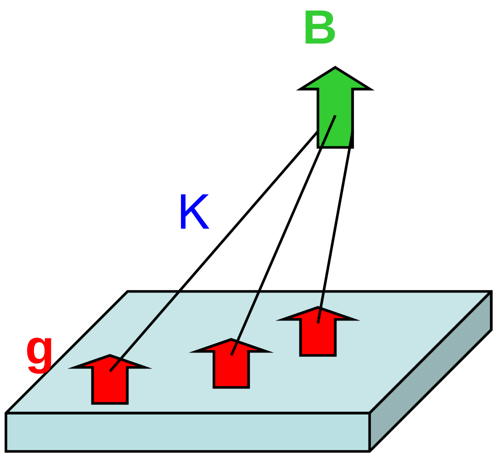
Ch. Jooss et al. Physica C,299(1998)215.

$$\boldsymbol{B}_z = \mu_0 H_{ex} + \mu_0 \int_V K_g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')g(x,y)d^3r' \qquad \ldots \ (1)$$

g : local magnetizaion

K_g : green function

z component of magnetic dipole



Using convolution theorem
Eq.(1) can be transformed into

$$\tilde{\boldsymbol{B}}_z(\boldsymbol{k}) = \mu_0 \tilde{K}_g(\boldsymbol{k})\tilde{g}(\boldsymbol{k})$$

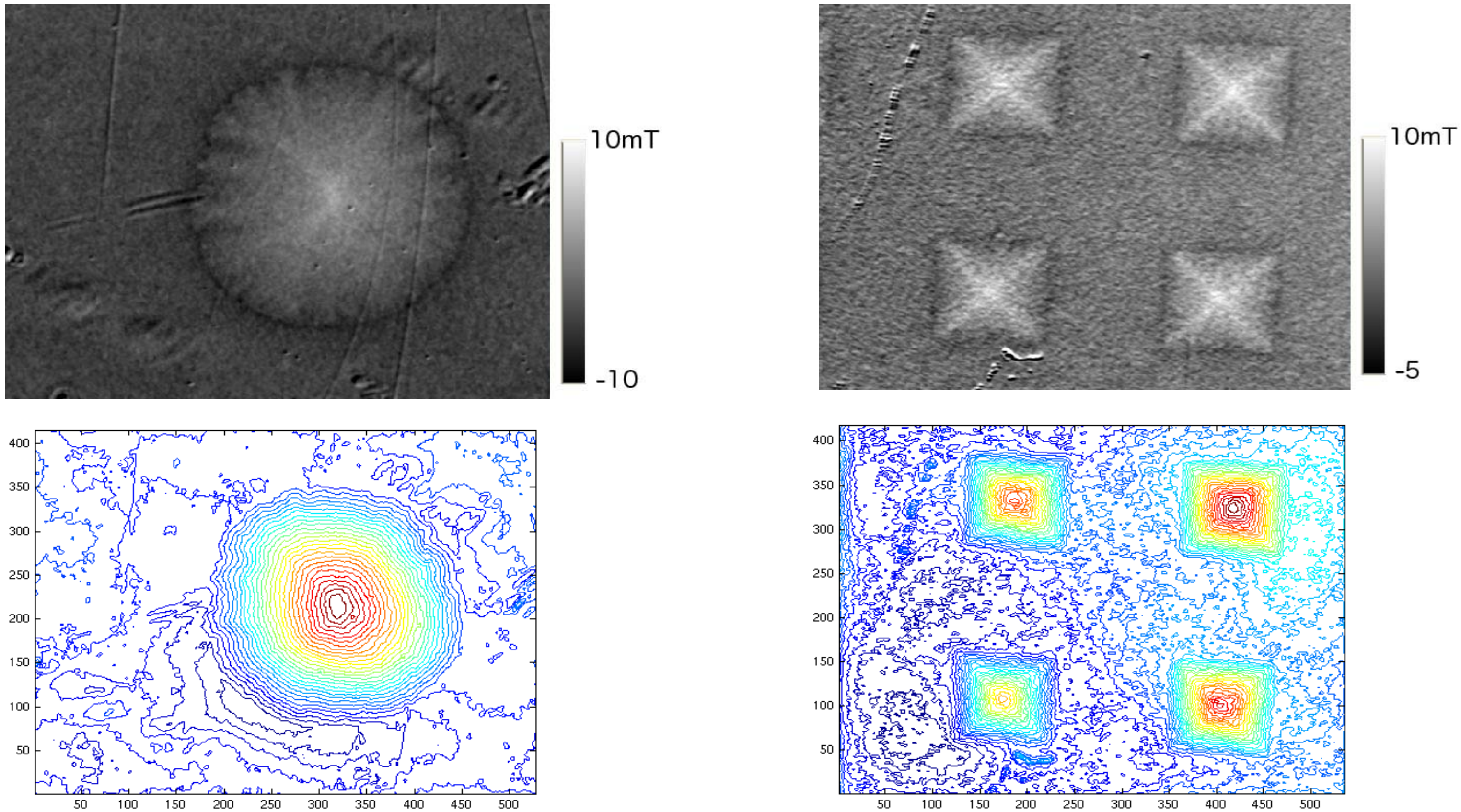
x and y component of J are obtained as

$$\boxed{\Delta \cdot \boldsymbol{J} = 0}$$

$$\tilde{j}_x = -i\frac{\tilde{\boldsymbol{B}}_z}{\tilde{K}_x} \qquad \tilde{j}_x = -\tilde{j}_x\frac{k_x}{k_y}$$

$$\tilde{K}_x = \mu_0 \frac{e^{-kh}}{k} sinh\left(\frac{kd}{2}\right)\left[\frac{k_y}{k} + \frac{k_x{}^2}{k_y k}\right]$$

Magnetic & Current images

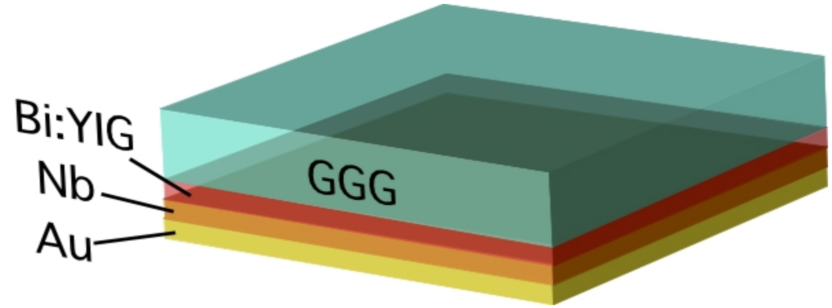


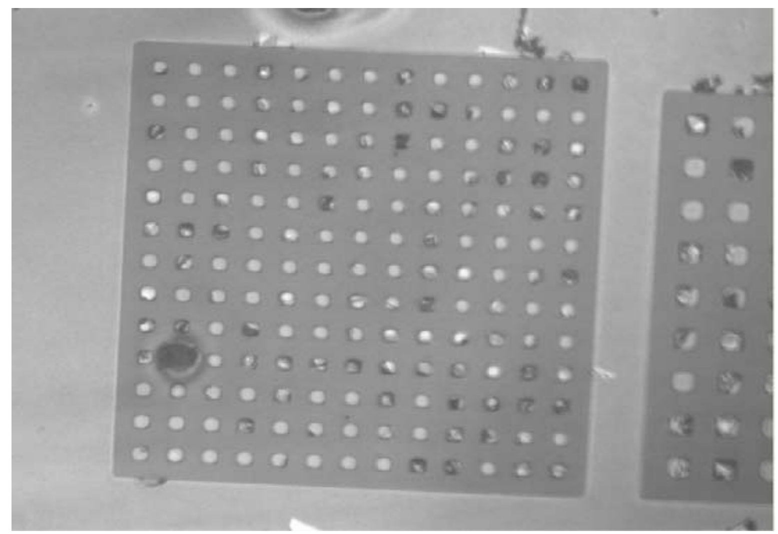
Density of lines corresponds to current density.
Color indicates local moment obtained in a calculation.

Current density ~ $6 \times 10^7 \mathrm{A/cm}^2$

Nb pattern prepared on Bi:YIG

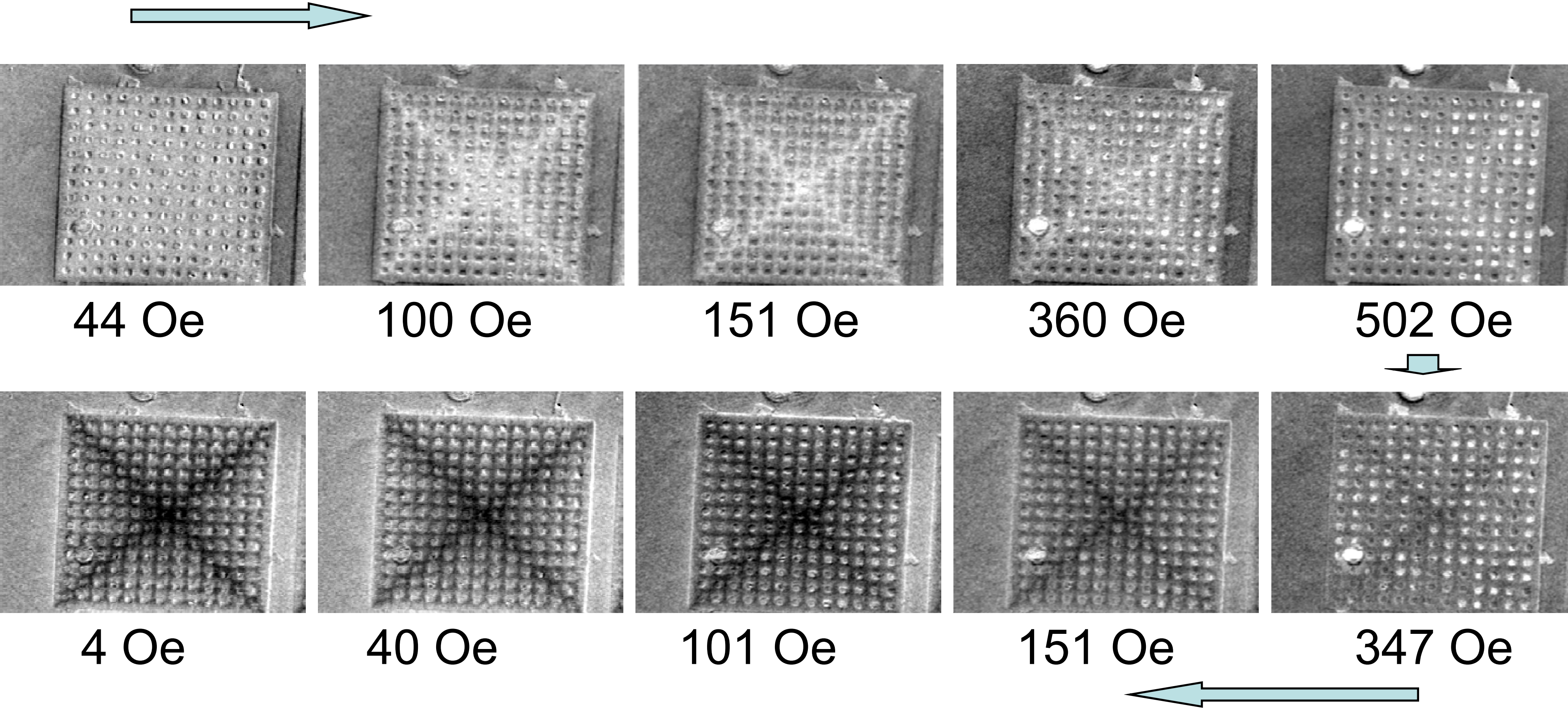
- Substrate $Gd_3Ga_5O_{12}$(111)
- MO indicator film
  $Y_2BiFe_5O_{12}$ (400nm)
    by MOD mothod
- Superconductor
  Nb (150nm)
    by sputtering method
- Mirror   Au
- Pattern size of anti-dots
  7, 10, 15μm□





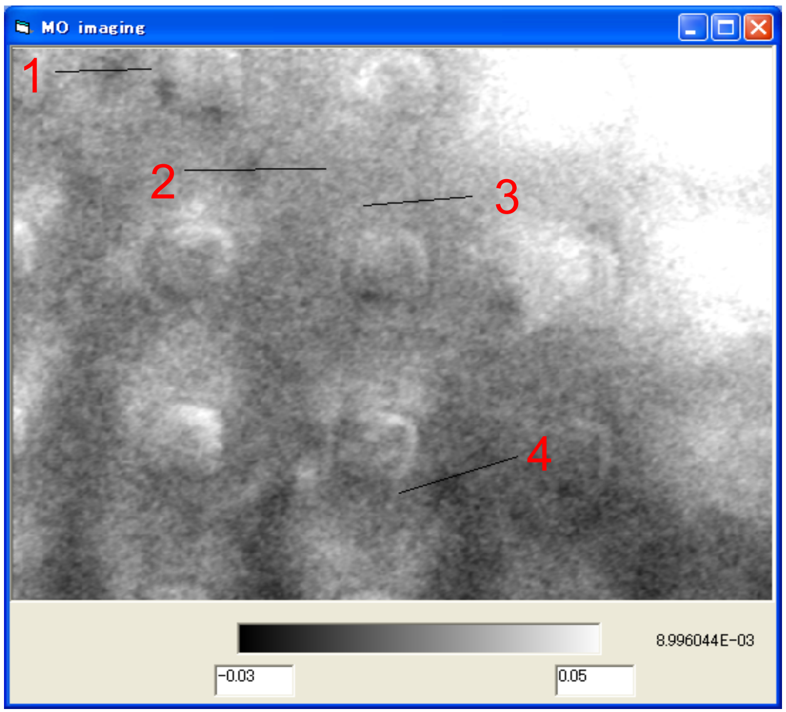
Optical image

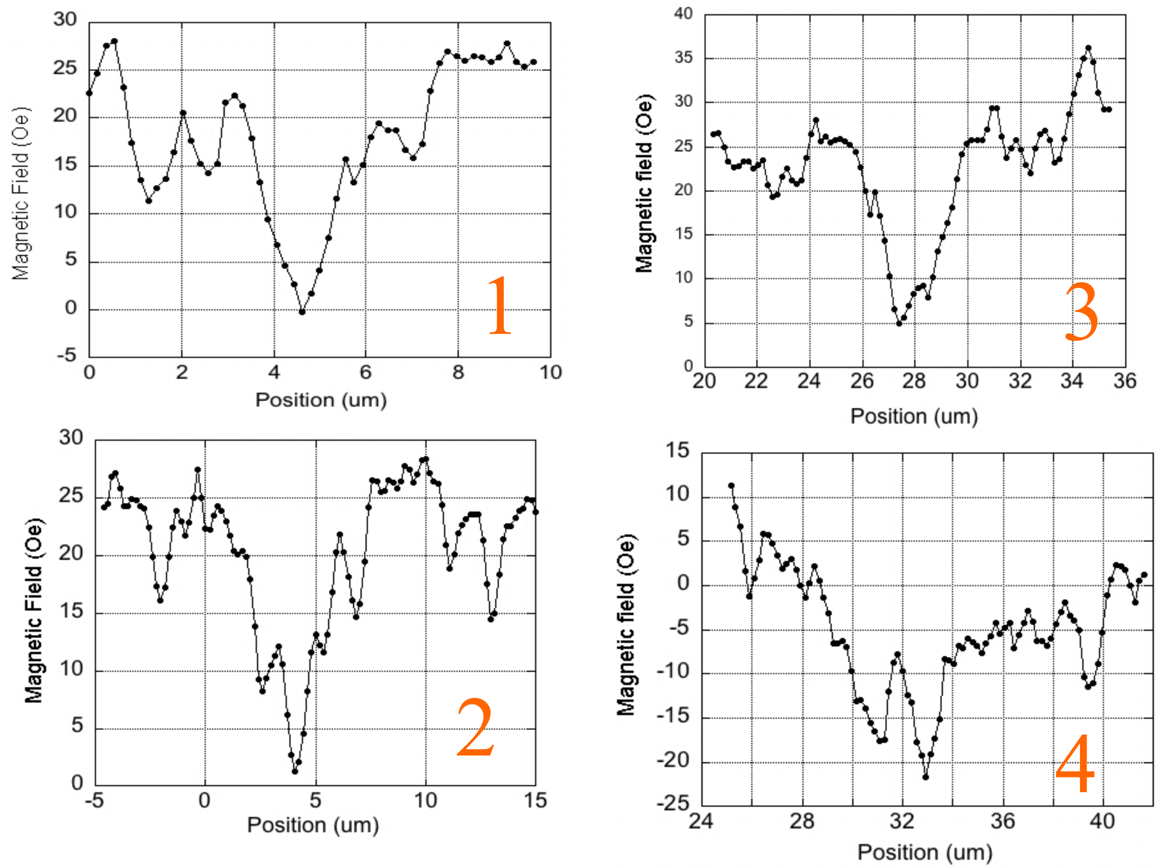
MO images of 10mm anti-dots



MO images of Nb 10μm × 10μm anti-dots pattern with applying magnetic field.
The sample was zero-field cooled down to 3.5K.

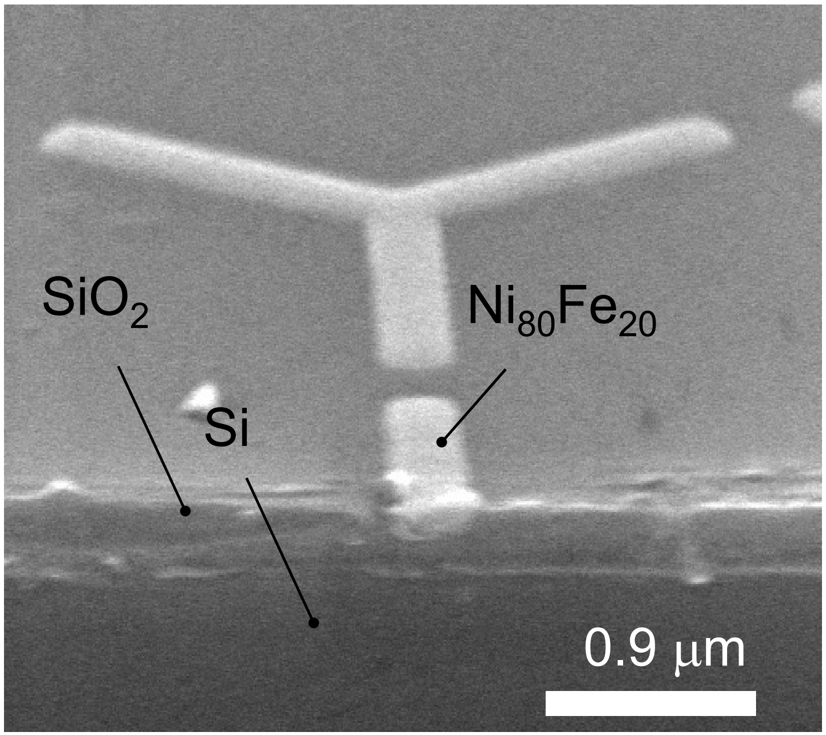
High resolution MO image



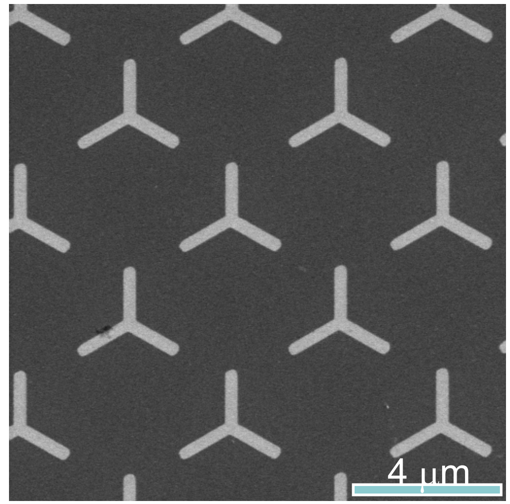


4. Magnetic imaging
(2) Magnetic structures

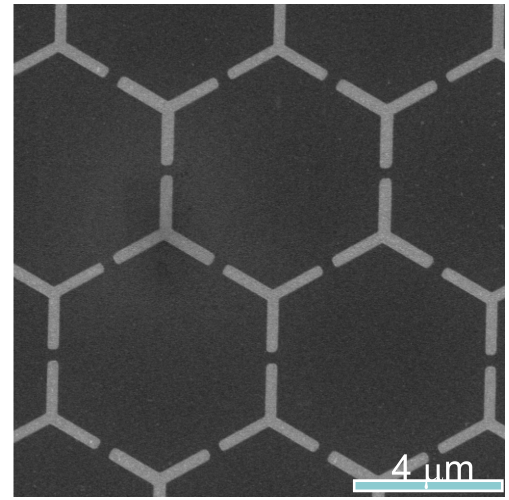
Y-shaped patterns buried in Si



Cross sectional SEM image

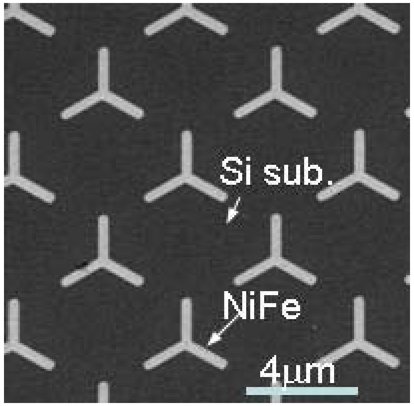


Linearly aligned

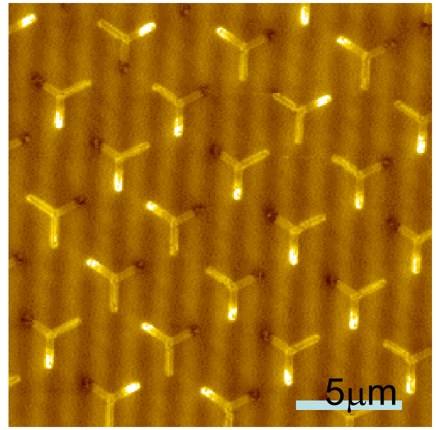


Honeycomb aligned

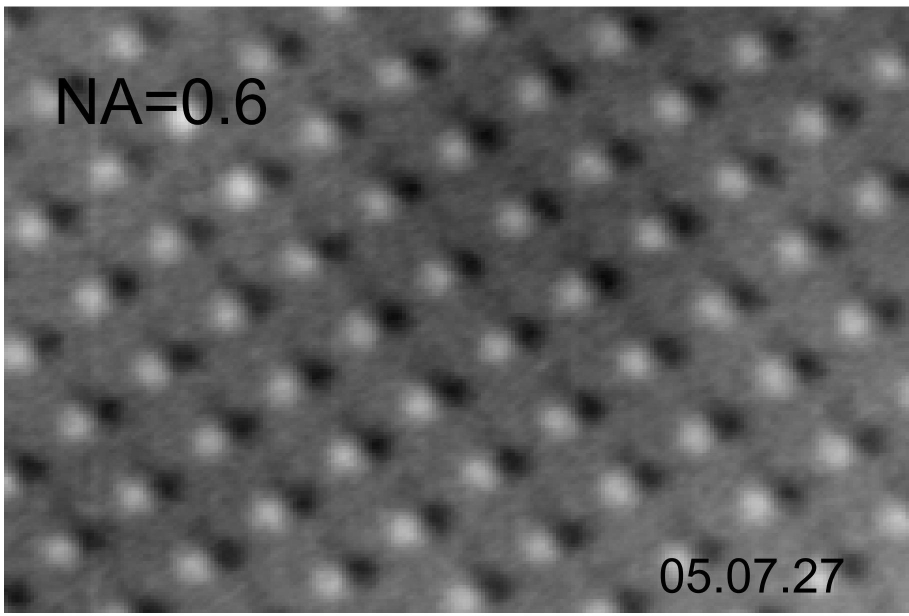
MO Observation of Y-shaped patterns

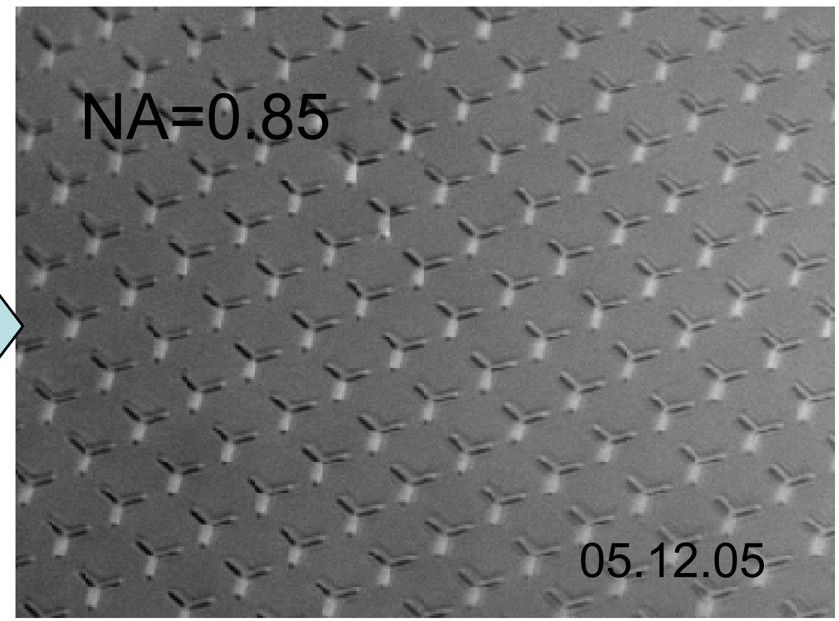


SEM image



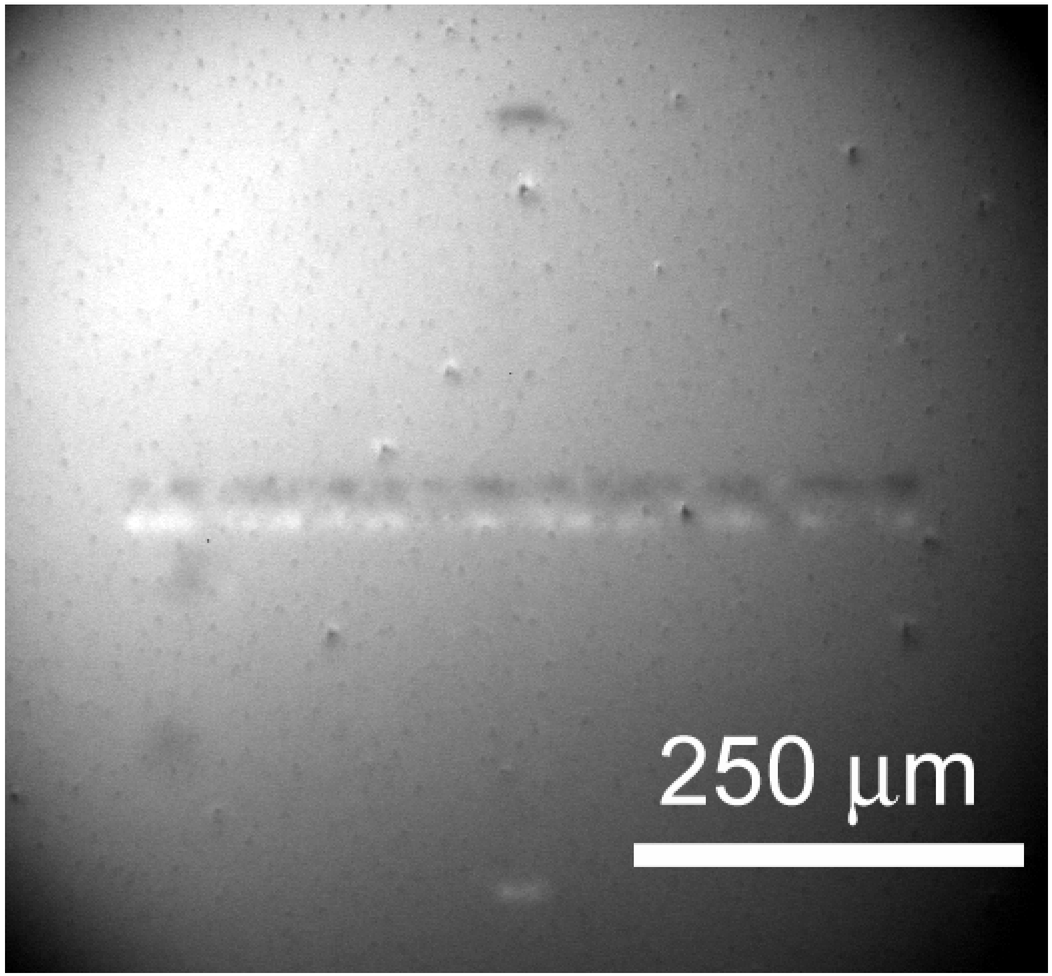
MFM image





MO images

Use of MO indicator for observation of in-plane magnetization



Conclusions

- Quantitative magnetic imaging by the MO imaging technique using the polarization modulation technique combined with MO indicator films was developed.
- This technique allows us quantitative and nondestructive measurements for magnetic stray field as well as current distribution.
- Evaluations of stray field, current distribution were demonstrated for the superconducting MgB_2 patterned sample.

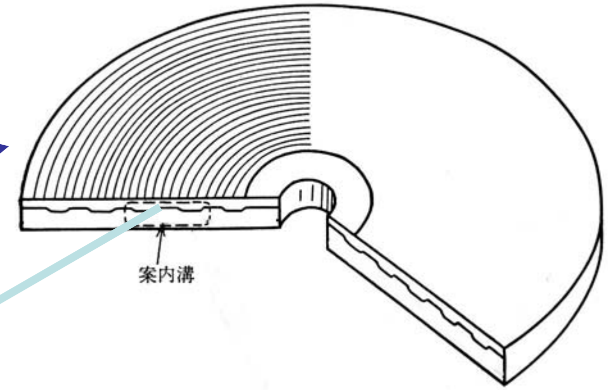
光磁気記録

- 光で情報を磁気記録する
- 磁気記録された情報を光で読む

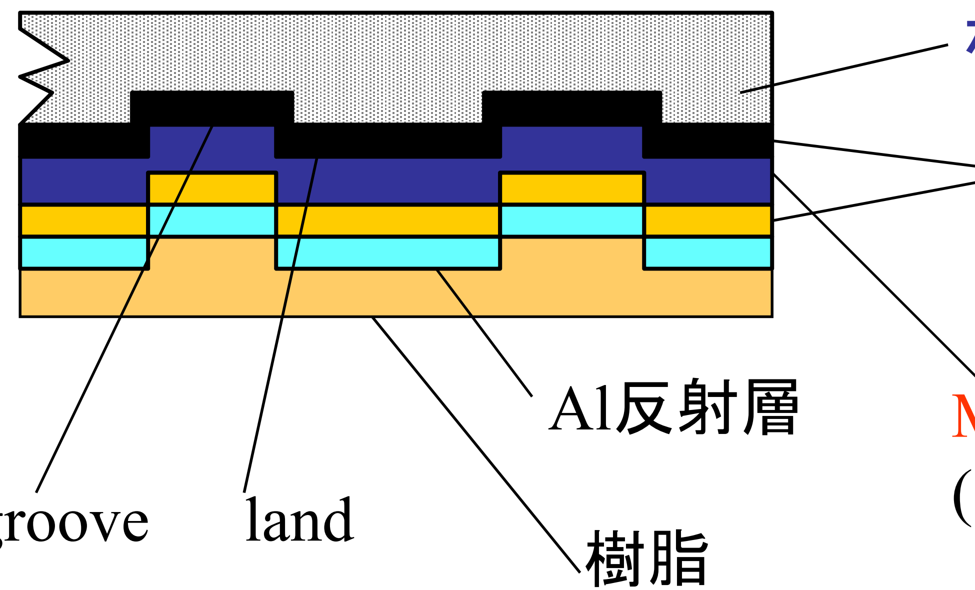
光磁気ディスク

- 記録:　熱磁気(キュリー温度）記録
  - 光を用いてアクセスする**磁気記録**
- 再生:　磁気光学効果
  - 磁化に応じた偏光の回転を電気信号に変換
- **MO, MD**に利用
- 互換性が高い
- 書き替え耐性高い:**1000**万回以上
- ドライブが複雑(偏光光学系と磁気系が必要）
- **MSR, MAMMOS, DWDD**など新現象の有効利用可能

光磁気媒体

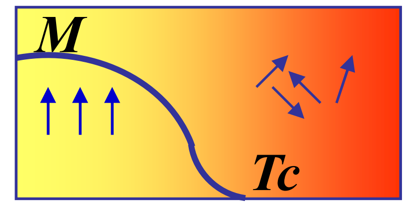


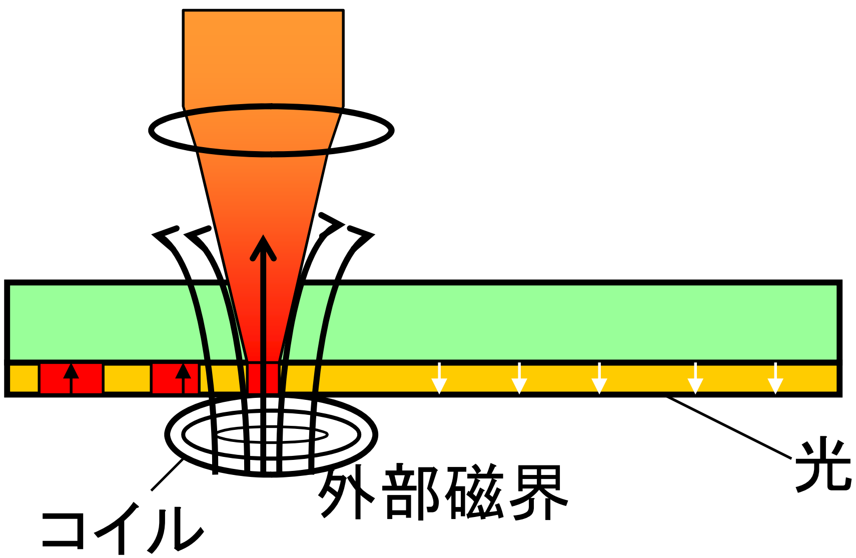
- MOディスクの構造

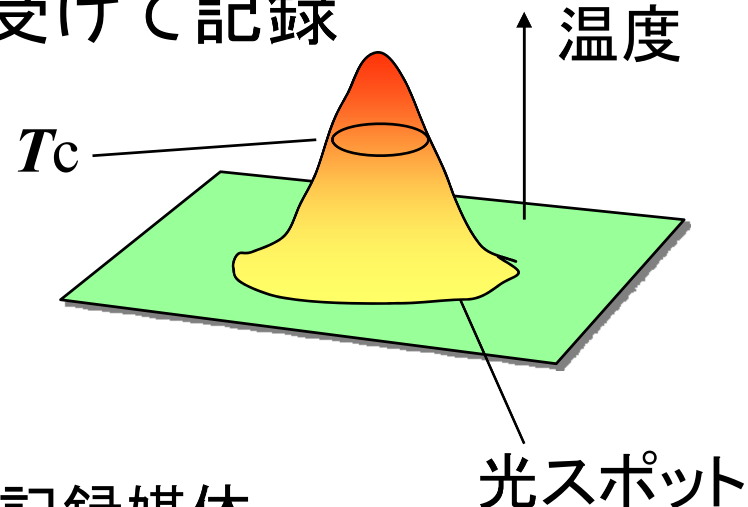


光磁気記録 情報の記録(1)

- レーザ光をレンズで集め磁性体を加熱
- キュリー温度以上になると磁化を消失
- 冷却時にコイルからの磁界を受けて記録

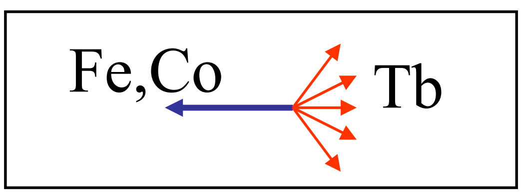


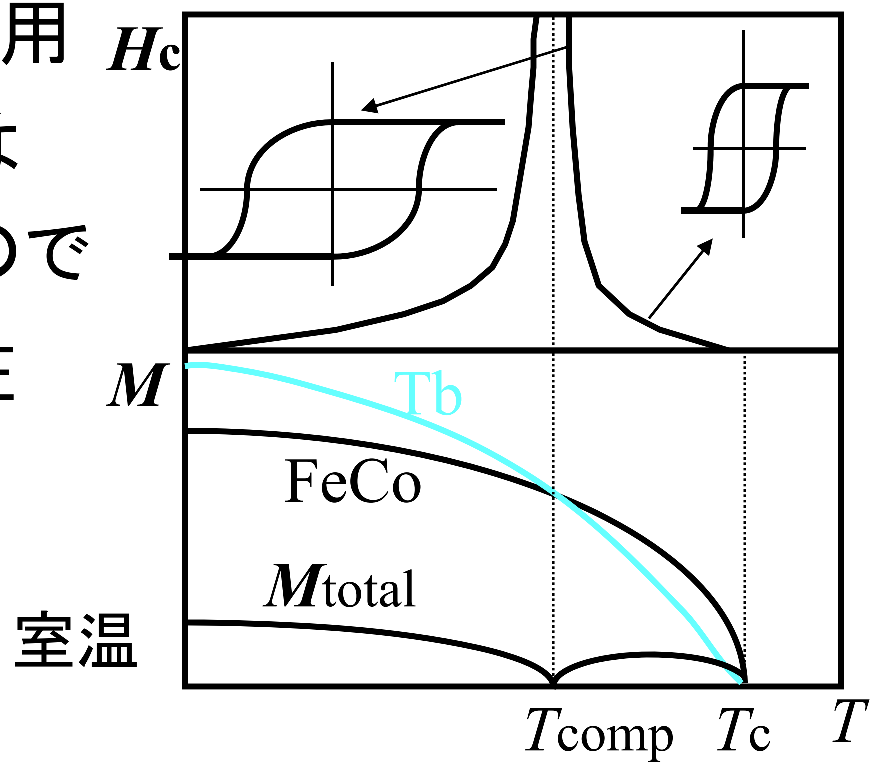




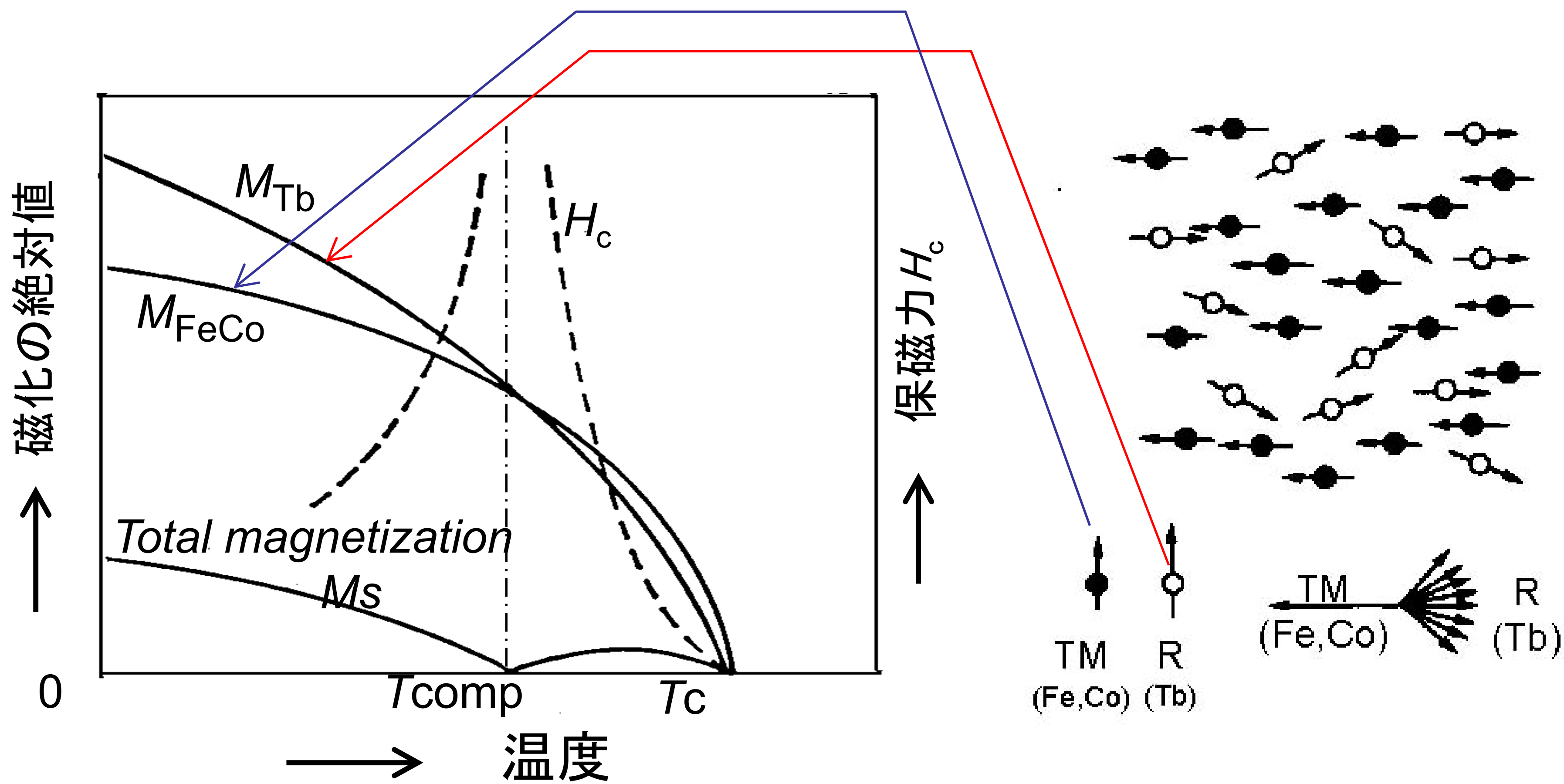
光磁気記録 情報の記録(2)

- 補償温度(*T*comp)の利用
- アモルファスTbFeCoは一種のフェリ磁性体なので補償温度*T*compが存在
- *T*compで*H*c最大:
  - 記録磁区安定





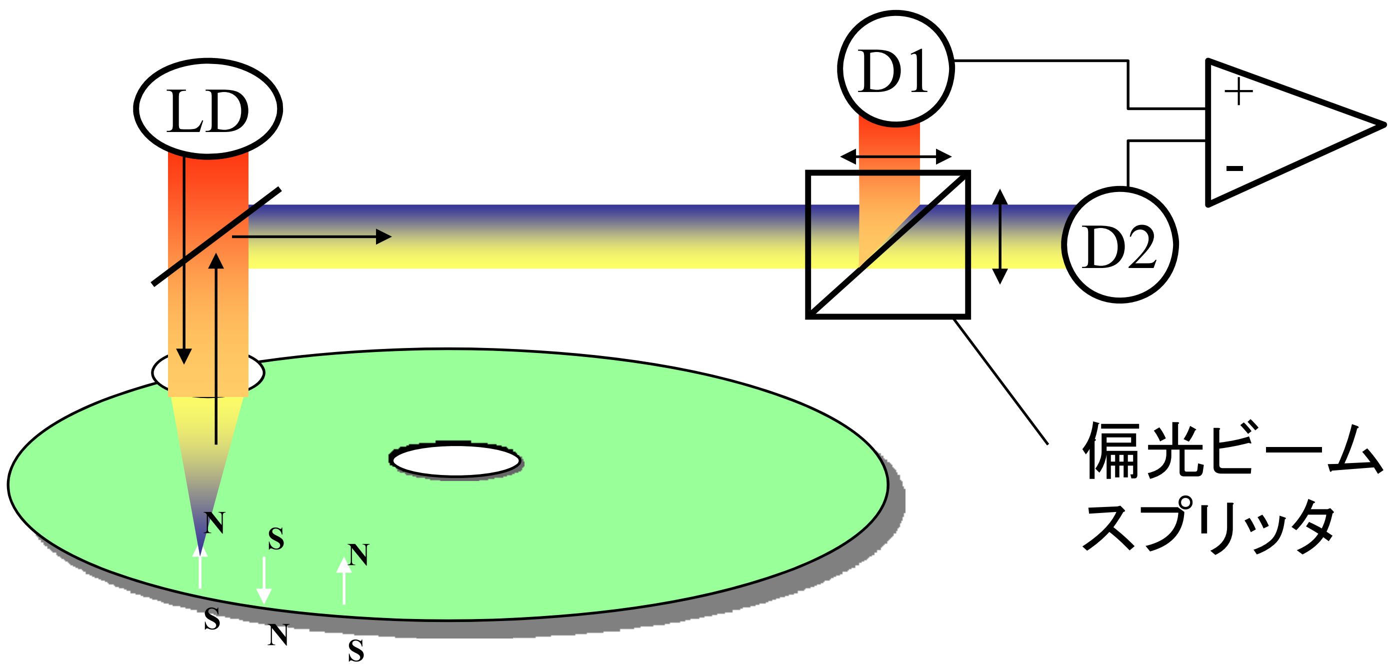
a-TbFeCo MO媒体



TbFeCo系の場合、補償温度が室温付近に来るよう膜組成が制御されているため、図に示すように、室温付近での*Ms*が小さく、従って、*Hc*が大きいので、超常磁性効果に対して有効である。

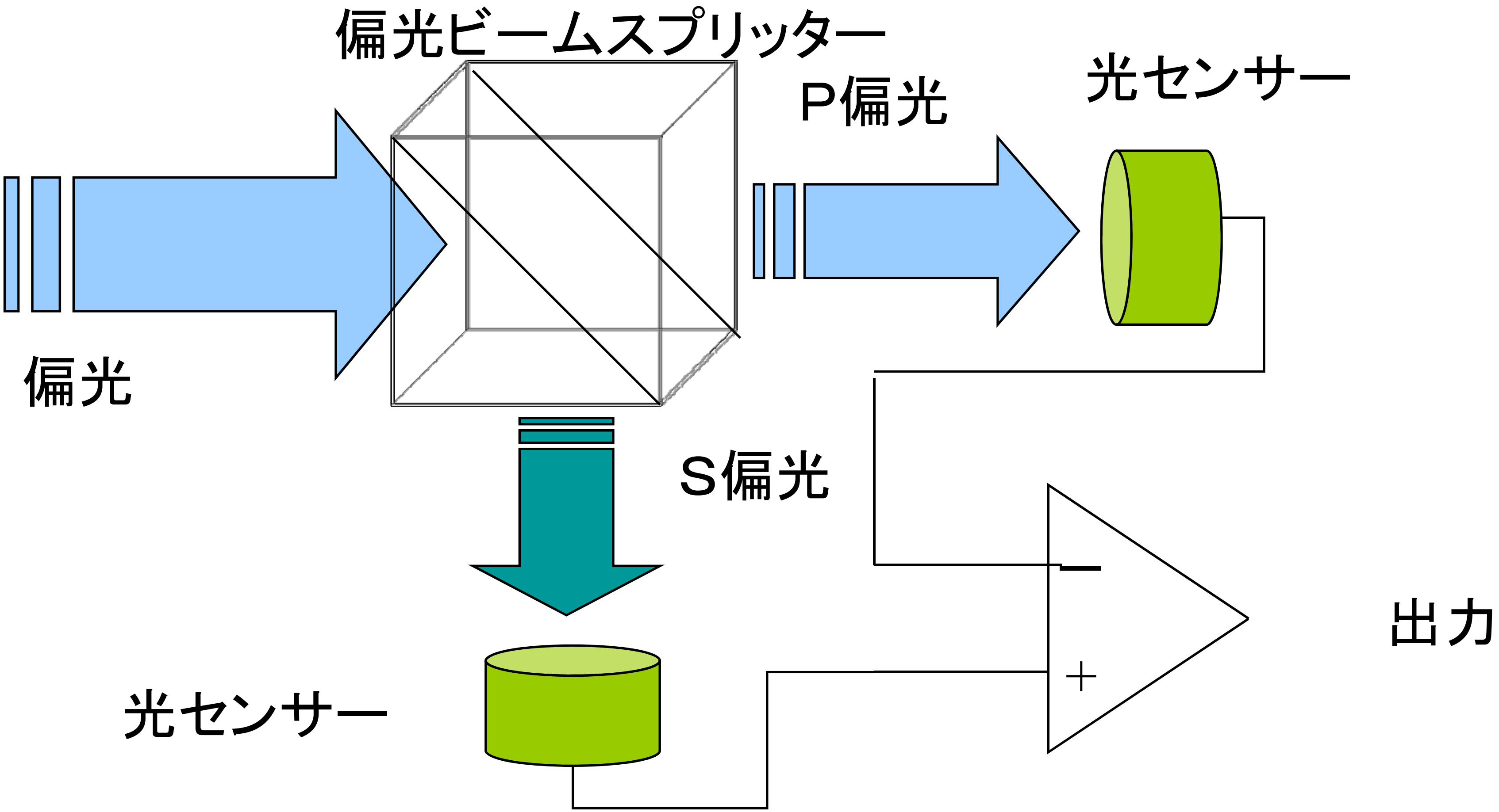
光磁気記録 情報の読み出し

- 磁化に応じた偏光の回転を検出し電気に変換



差動検出系

- 差動検出による高感度化



MOドライブ

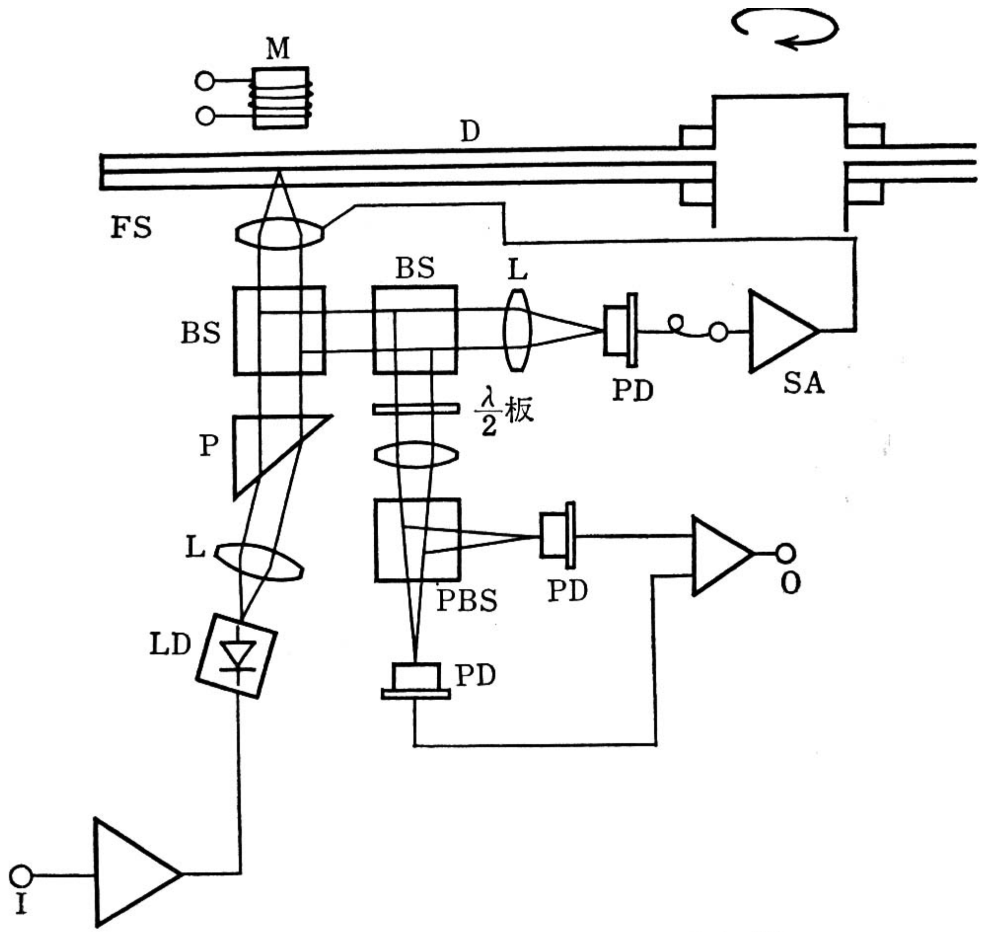
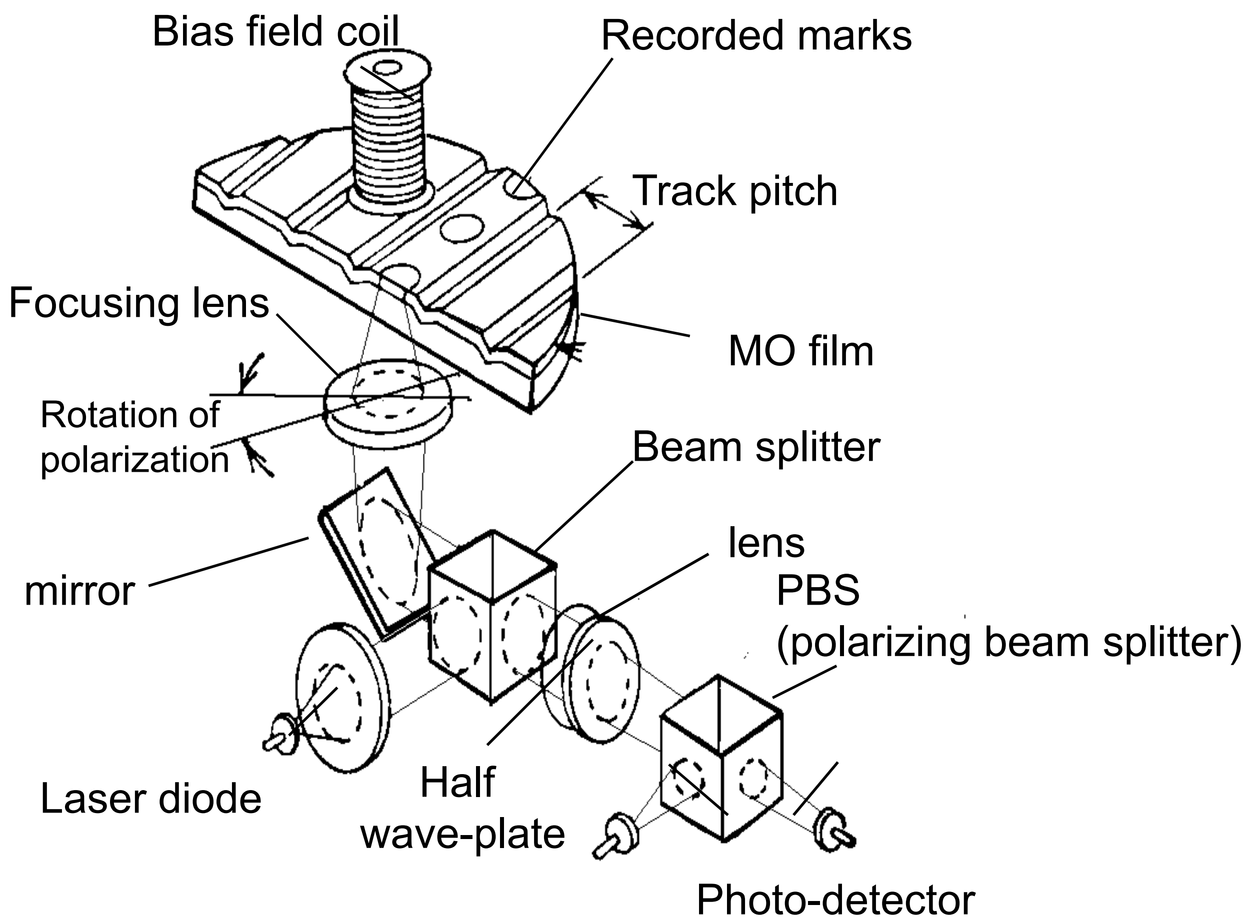


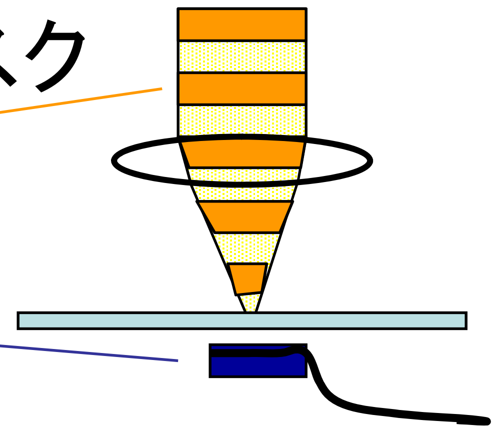
図 7.9　光磁気記録再生システムの模式図[20]

MOドライブの光ヘッド

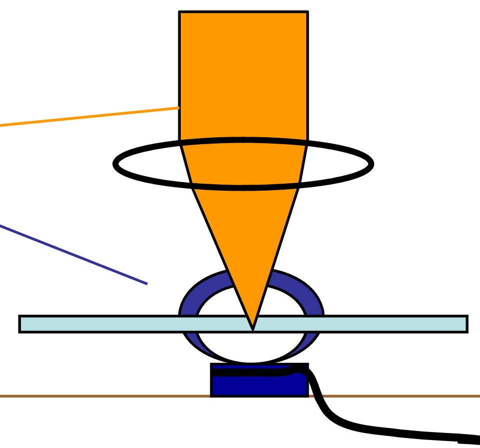


2種類の記録方式

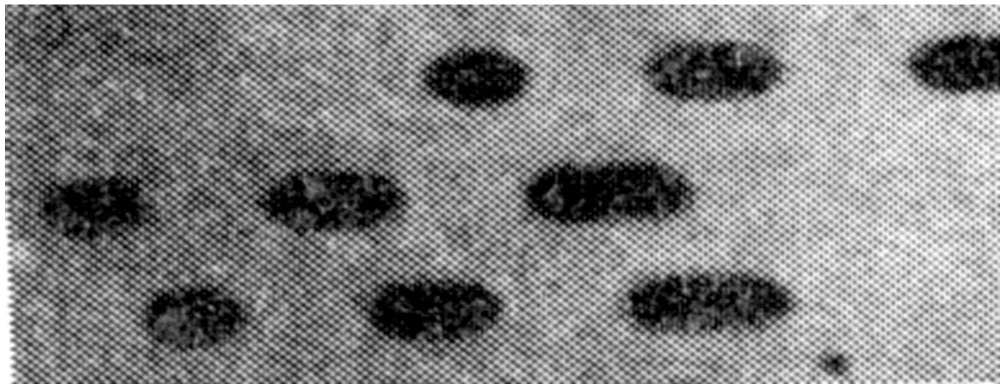
- 光強度変調(LIM):現行のMOディスク
  - 電気信号で光を変調
  - 磁界は一定
  - ビット形状は長円形



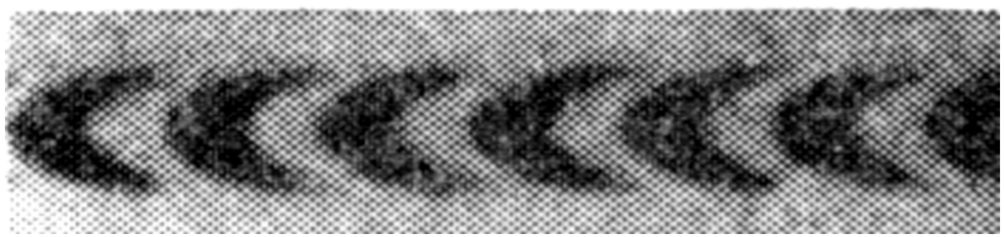
- 磁界変調(MFM):現行MD, iD-Photo
  - 電気信号で磁界を変調
  - 光強度は一定
  - ビット形状は矢羽形



記録ビットの形状



(a)



(b)

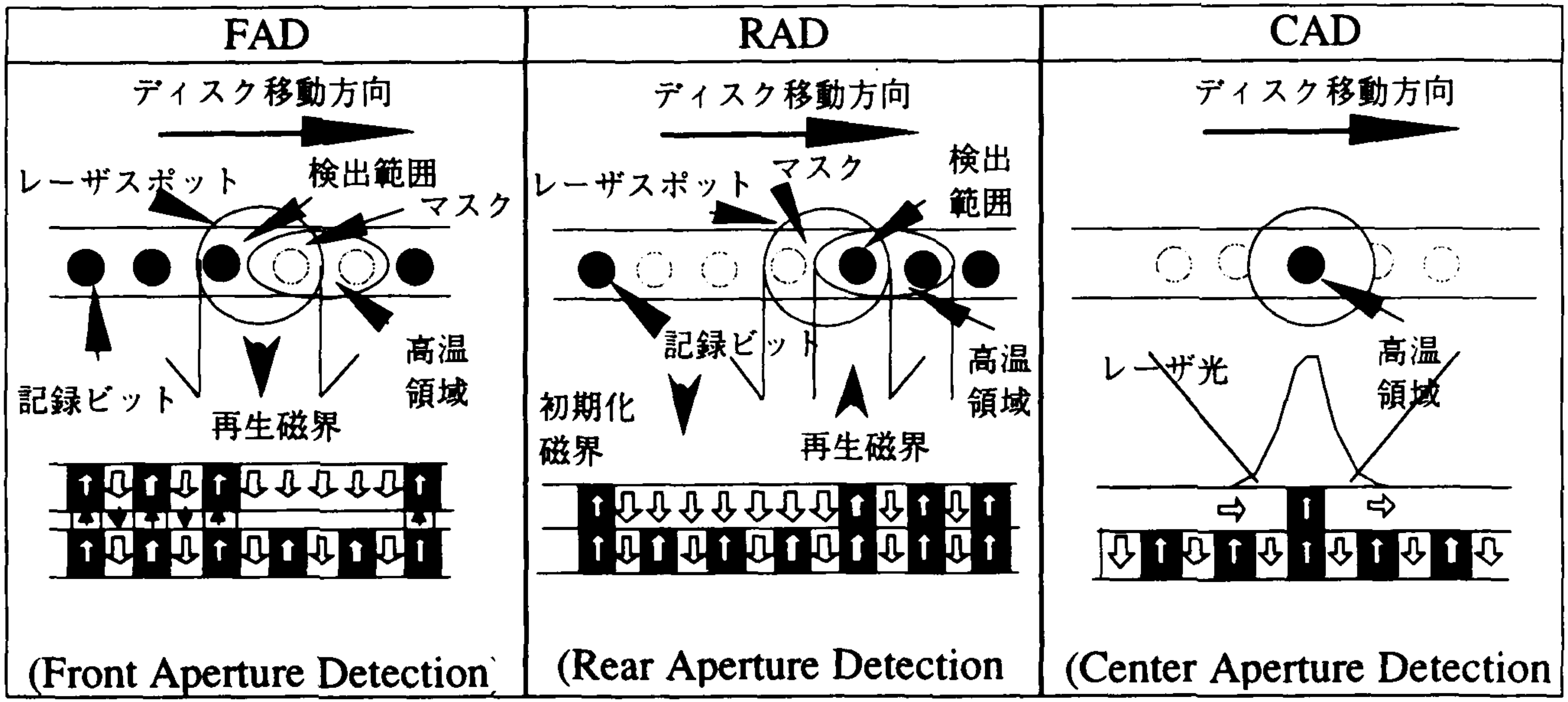
磁気誘起超解像技術(MSR)

- 光磁気記録では、磁気誘起超解像(MSR)技術が実用化されており、これを採用したGIGAMOでは、λ=650 nm(赤色レーザ)を用いて回折限界を超える直径0.3μmのマークを読みとっている[1]。直径3.5”のGIGAMOの記録密度は2.5 Gb/in^{2}程度である。
- 次世代規格であるASMOでは磁界変調記録法を採用することにより0.235 μmの小さなマークを記録することが可能で、面記録密度としては約4.6 Gb/in^{2}程度となる[2]。

[1] M. Moribe, M. Maeda, H. Nakayama, M. Yoshida, and K. Shono: *Digest ISOM’01, Th-I-01, Taipei, 2001*.

[2] S. Sumi, A. Takahashi and T. Watanabe: J. Magn. Soc. Jpn. 23, Suppl. S1 (1999) 173

MSR方式の図解

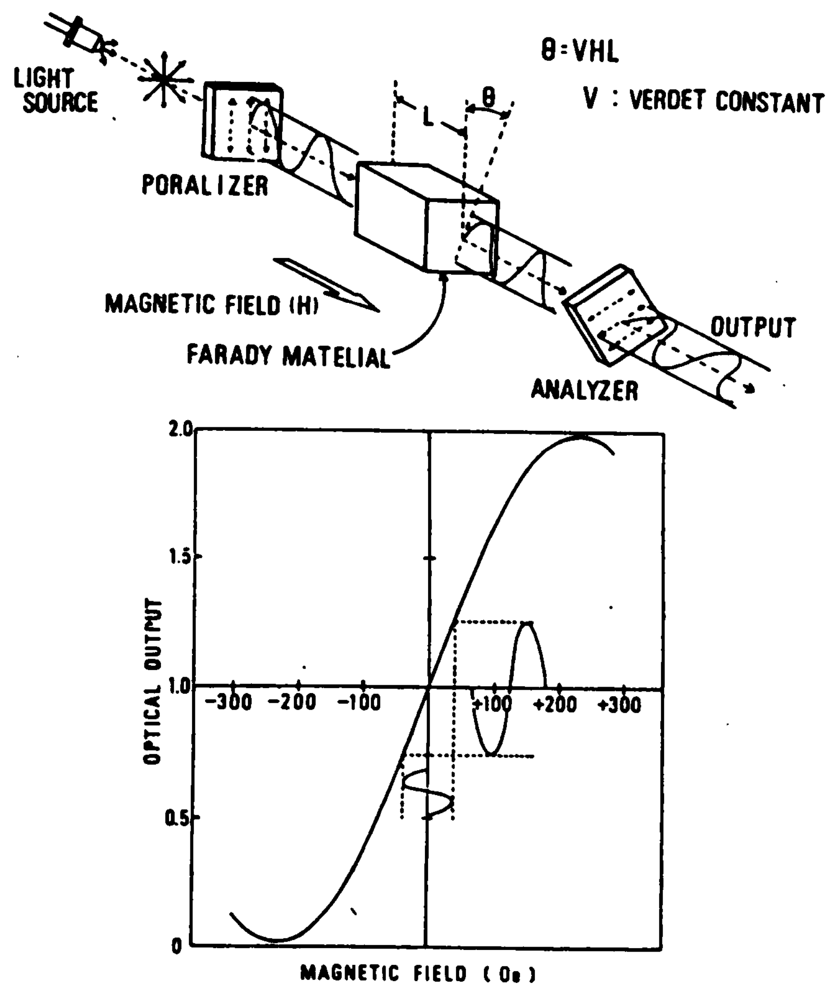


FAD
RAD
CAD
ディスク移動方向
レーザスポット
検出範囲
マスク
記録ビット
再生磁界
高温領域
(Front Aperture Detection
マスク
検出範囲
記録ビット
初期化磁界
再生磁界
高温領域
(Rear Aperture Detection
レーザ光
高温領域
(Center Aperture Detection

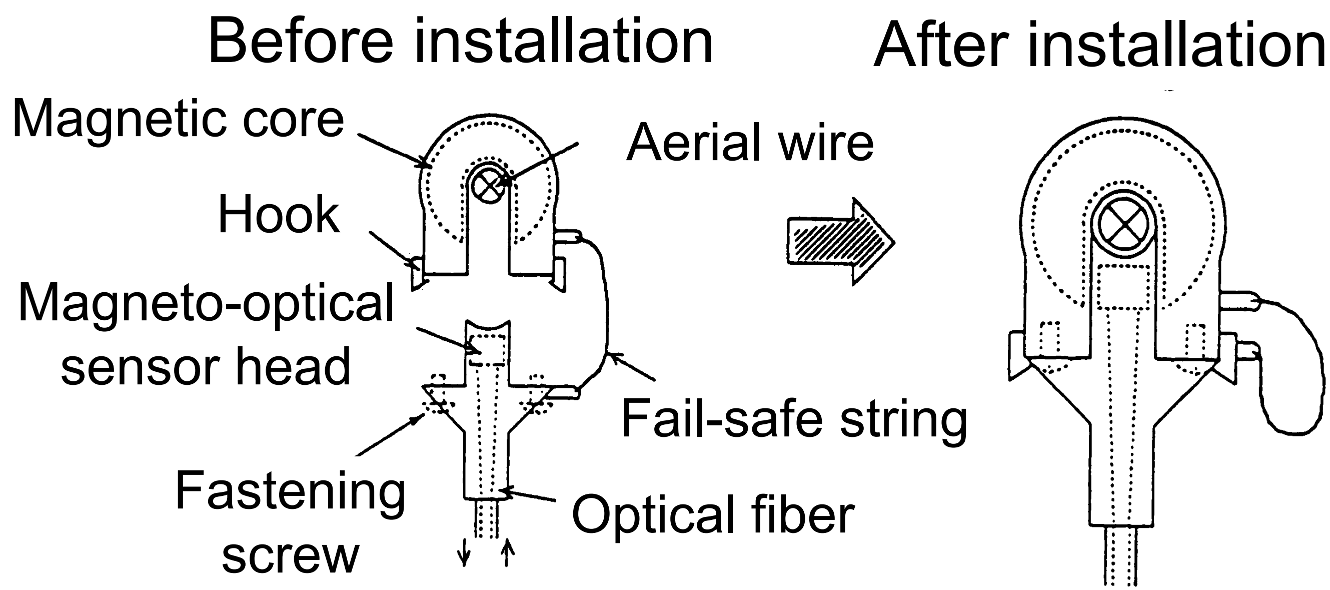
光で磁気を測る

- 電流磁界センサ
  - 高圧送電線を流れる電流を非接触かつ安全に計測
  - 交流電流による交流磁界を受けて光強度が交流的に変調される。
  - 偏光子と検光子とを45°傾けることにより、光強度が磁界に対し直線的に変動することを用いる。

電流磁界センサ

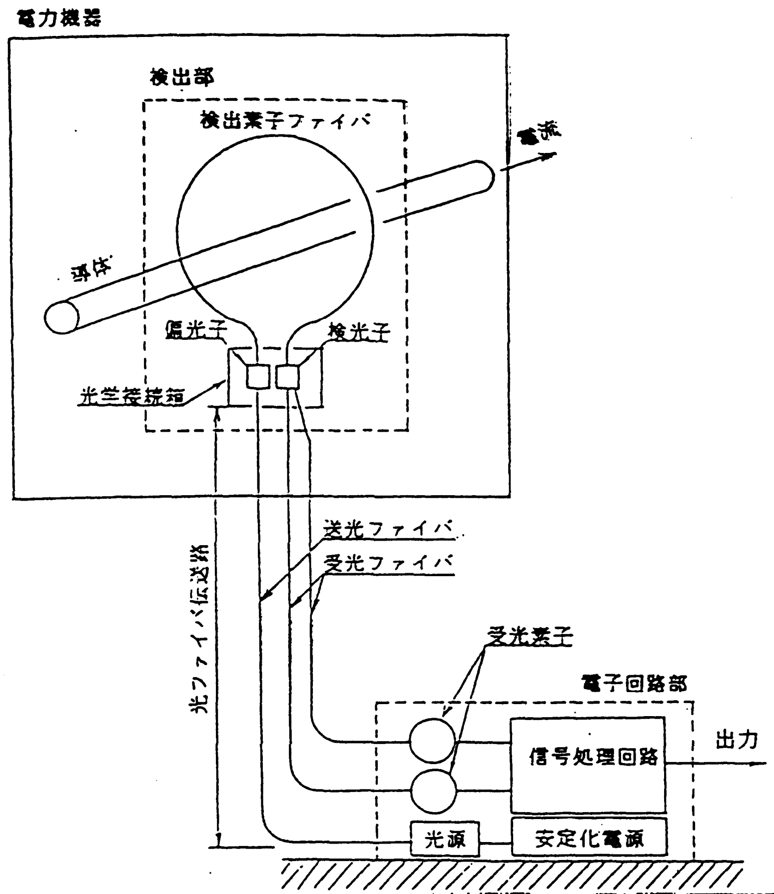

LIGHT SOURCE
PORALIZER
L
θ
θ=VHL
V : VERDET CONSTANT
MAGNETIC FIELD (H)
FARADY MATELIAL
ANALYZER
OUTPUT
2.0
1.5
1.0
0.5
0
-300
-200
-100
+100
+200
+300
OPTICAL OUTPUT
MAGNETIC FIELD (Oe)

電流センサ



Before installation
After installation
Magnetic core
Aerial wire
Hook
Magneto-optical
sensor head
Fail-safe string
Fastening
screw
Optical fiber

光ファイバ磁界センサ



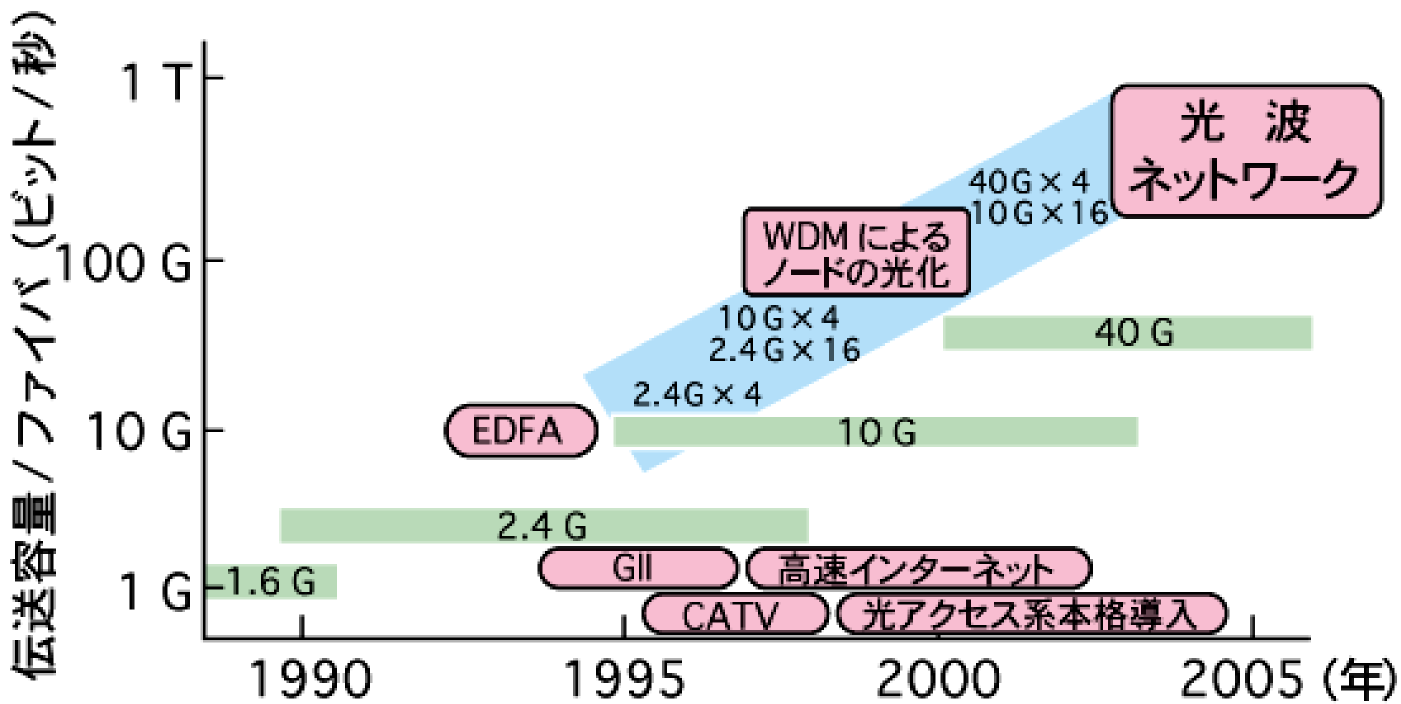
電力機器
検出部
検出素子ファイバ
電流
導体
偏光子
検光子
光学接続箱
送光ファイバ
受光ファイバ
光ファイバ伝送路
受光素子
電子回路部
信号処理回路
出力
光源
安定化電源

磁気で光を制御する

- 光アイソレータ
- 空間光変調器

光通信デバイスと磁気光学材料

図-1　光通信システムの展開



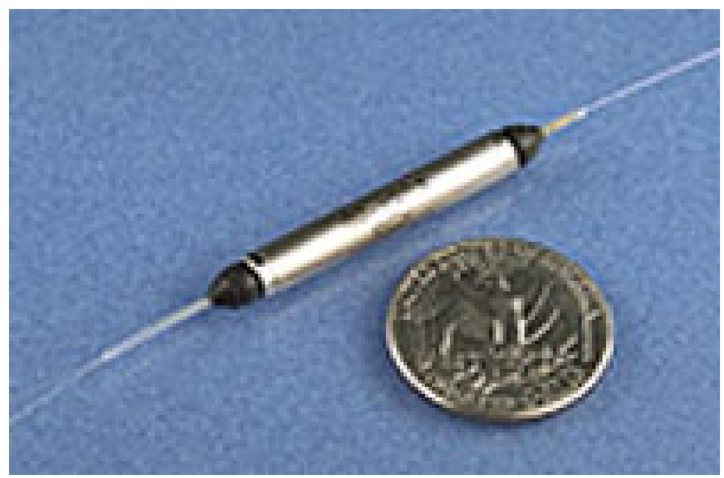
http://magazine.fujitsu.com/vol48-3/6.html

光通信における
磁気光学デバイスの位置づけ

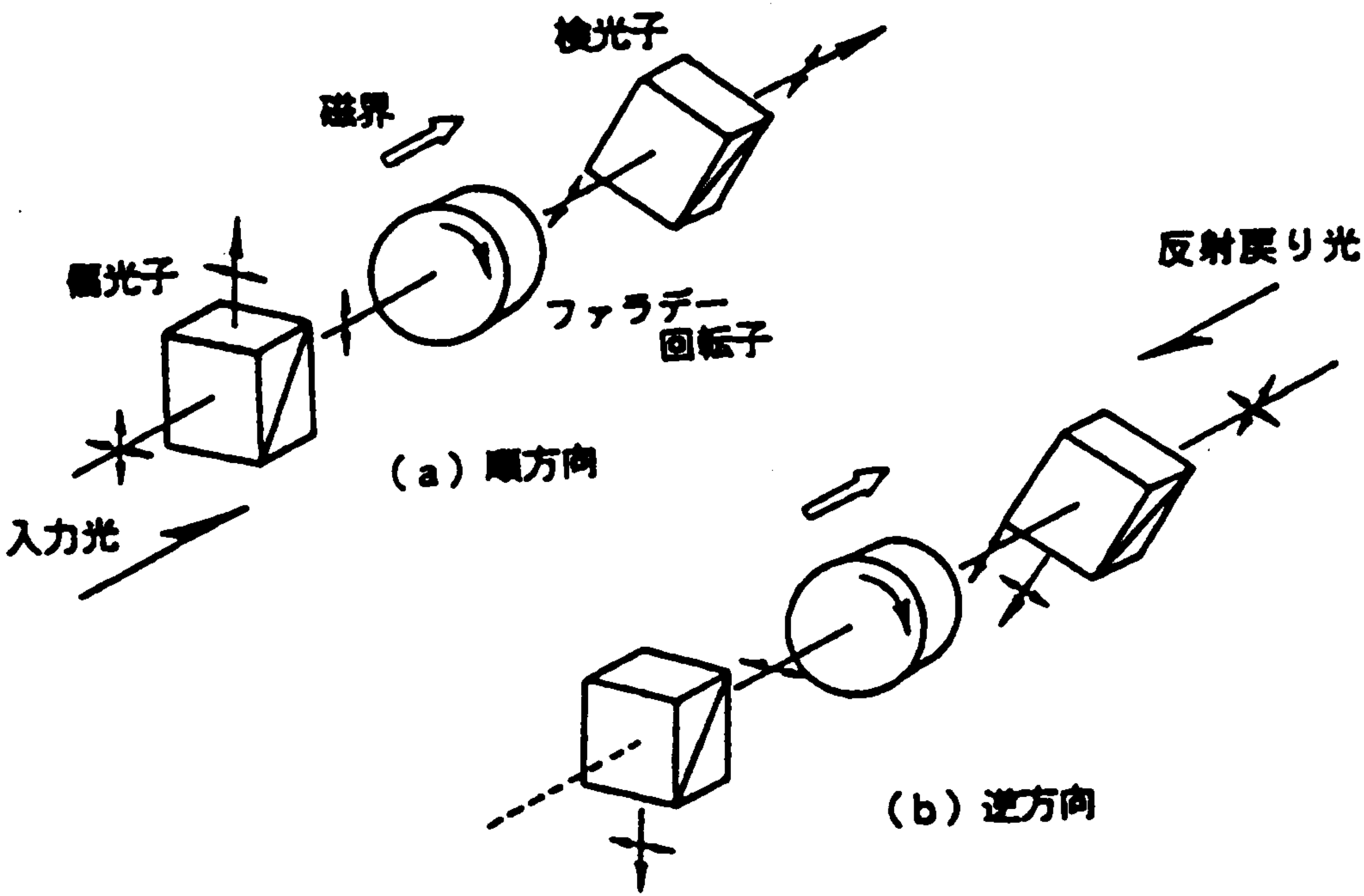
- 戻り光は、LDの発振を不安定にしノイズ発生の原因になる→アイソレータで戻り光を阻止。
- WDMの光アドドロップ多重(OADM)においてファイバグレーティングと光サーキュレータを用いて特定波長を選択
- EDFAの前後にアイソレータを配置して動作を安定化。ポンプ用レーザについても戻り光を阻止
- 光アッテネータ、光スイッチ

光通信用アイソレータ

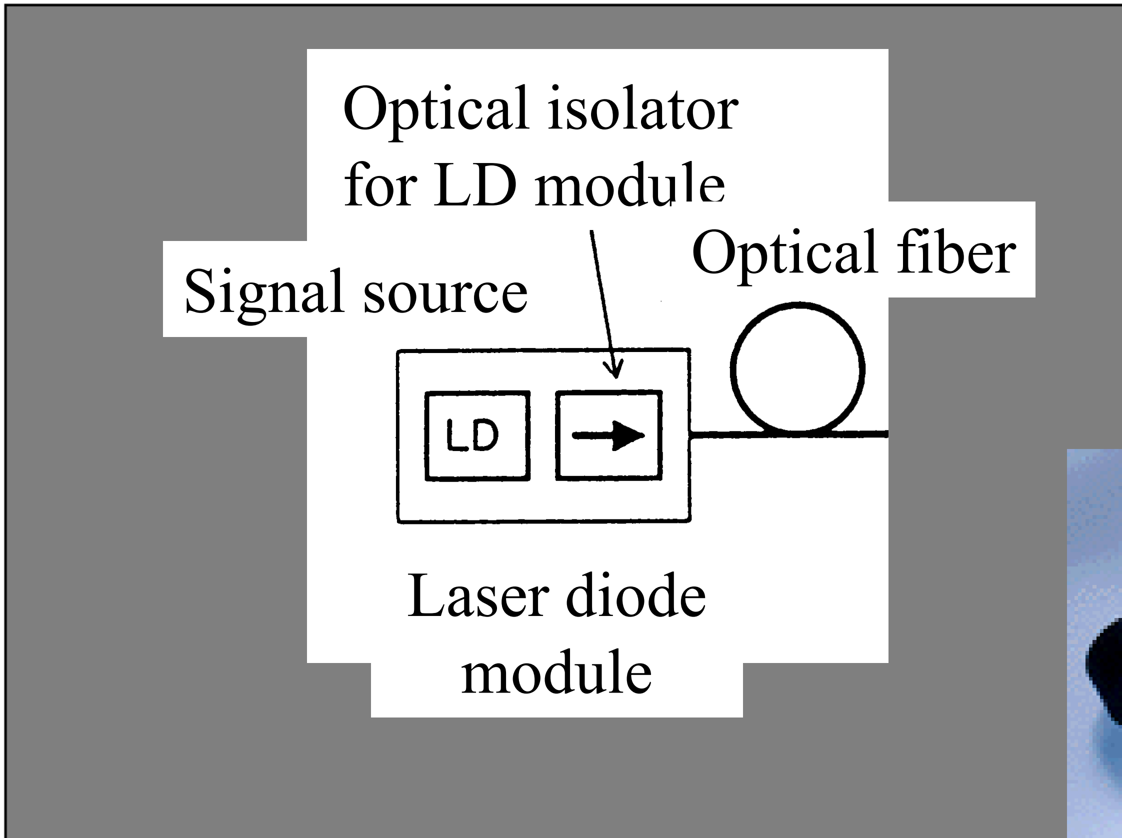
- 戻り光が半導体レーザーに入射して不安定化することを避けるために、磁気光学効果を用いて光を一方通行にするデバイス

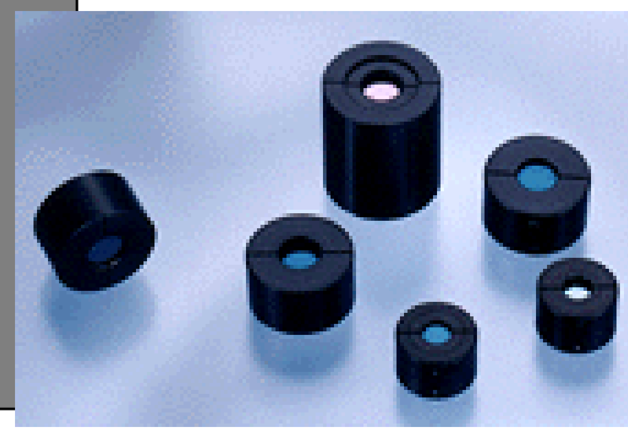


偏光依存アイソレータ

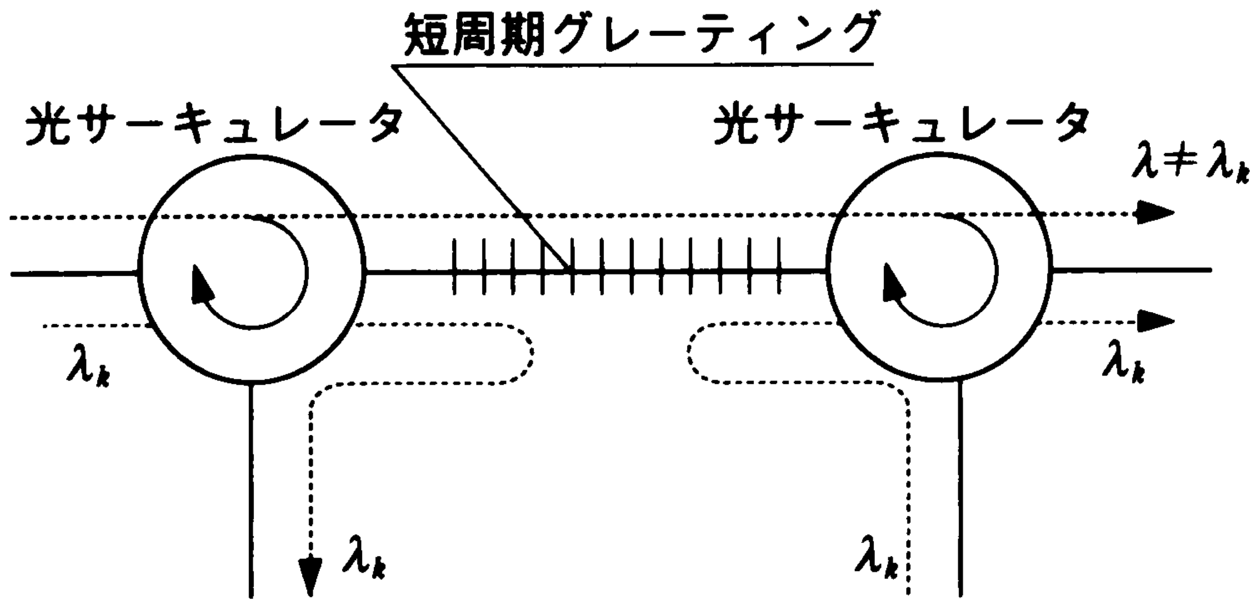


半導体レーザモジュール用アイソレータ

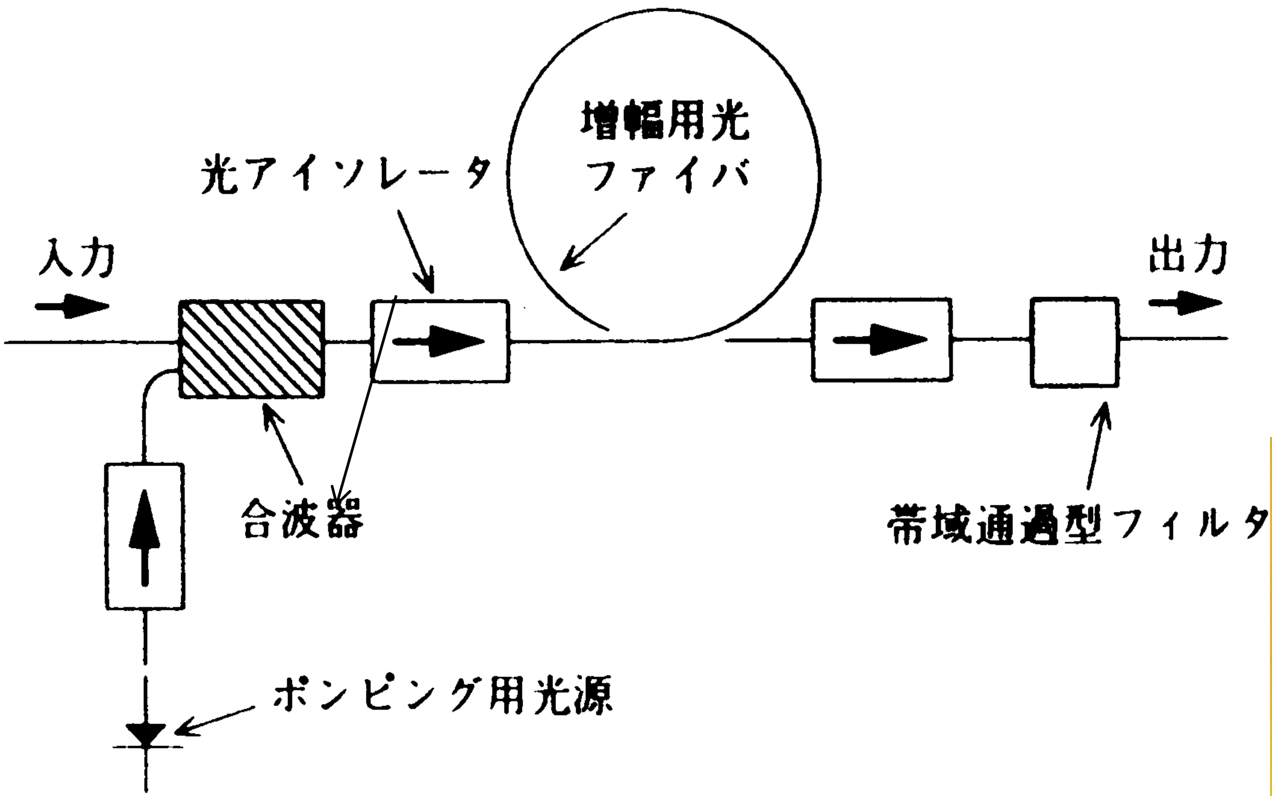




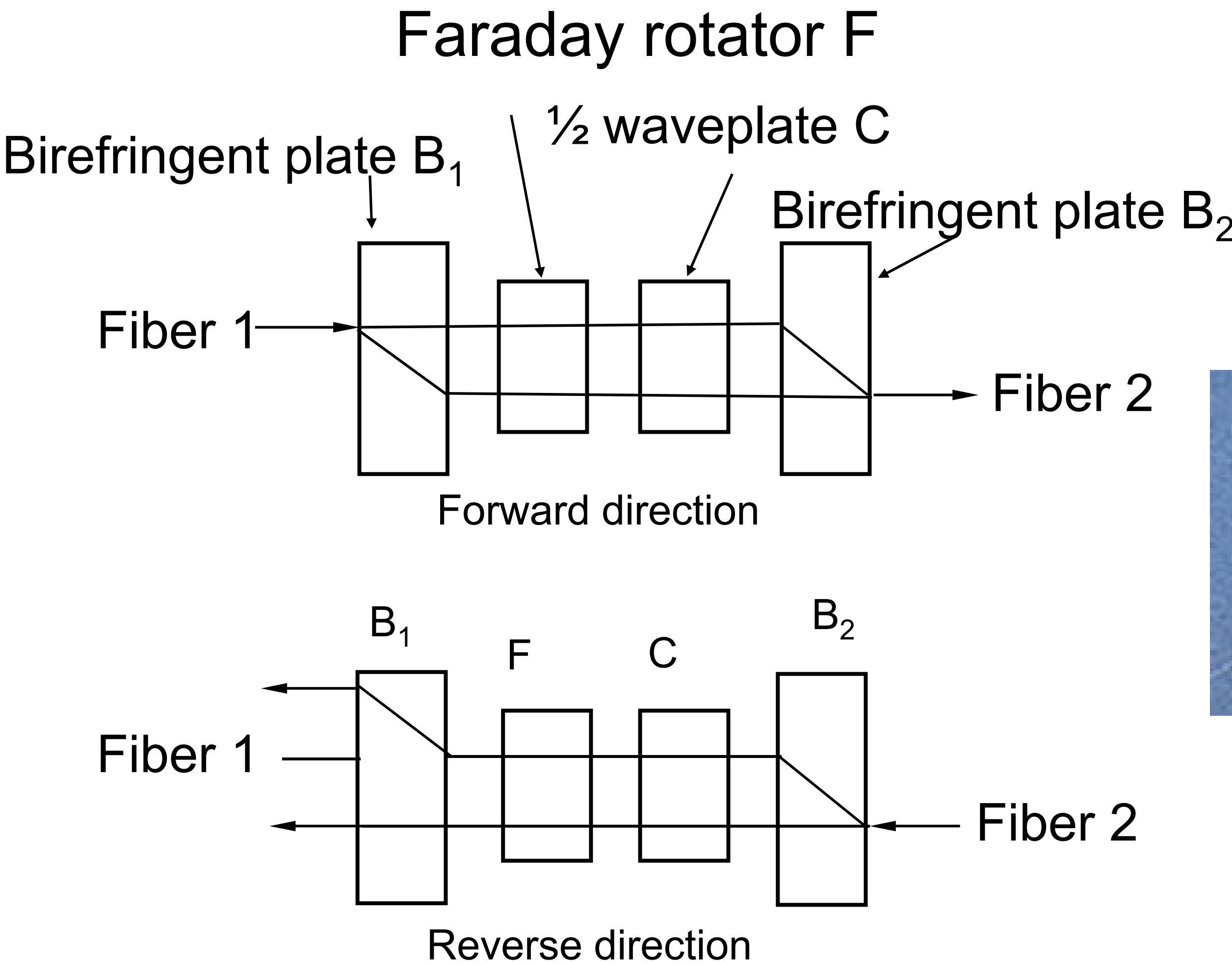
光アドドロップとサーキュレータ

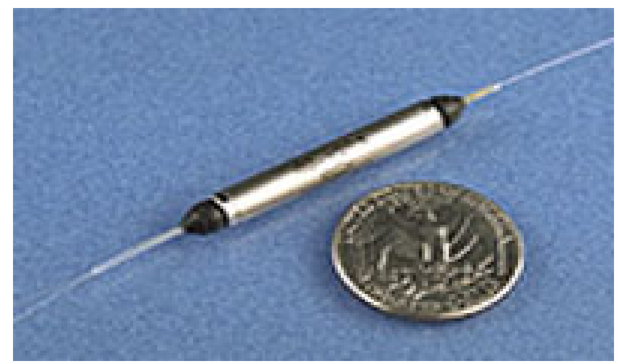


光ファイバ増幅器とアイソレータ



偏光無依存アイソレータ

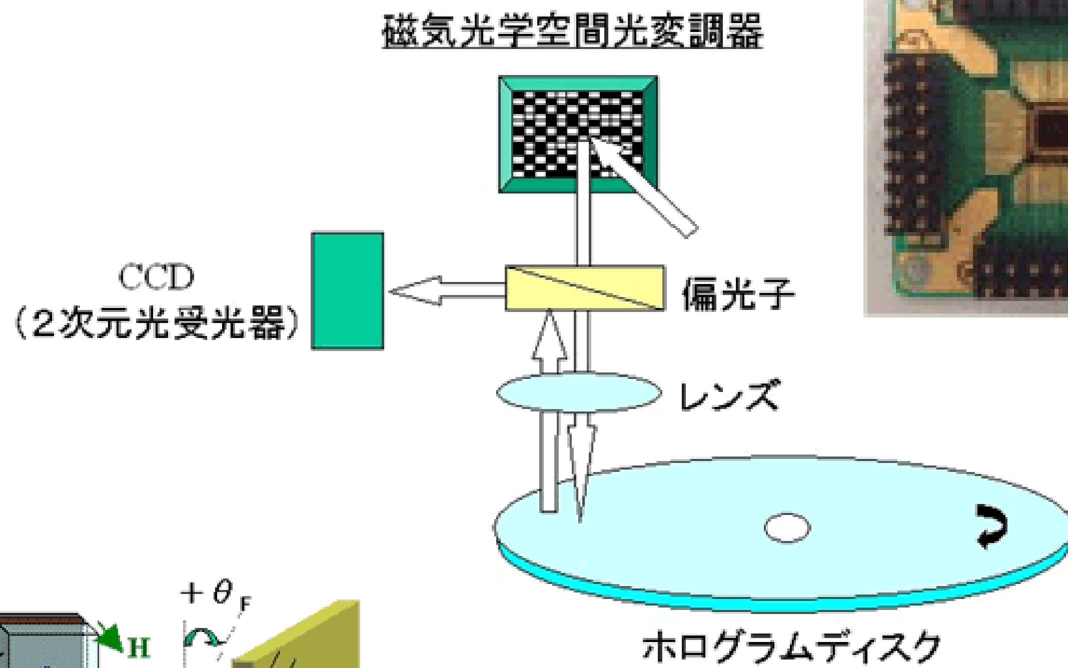


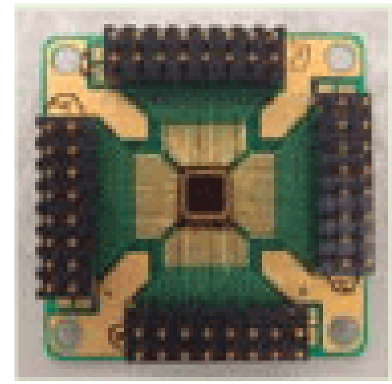


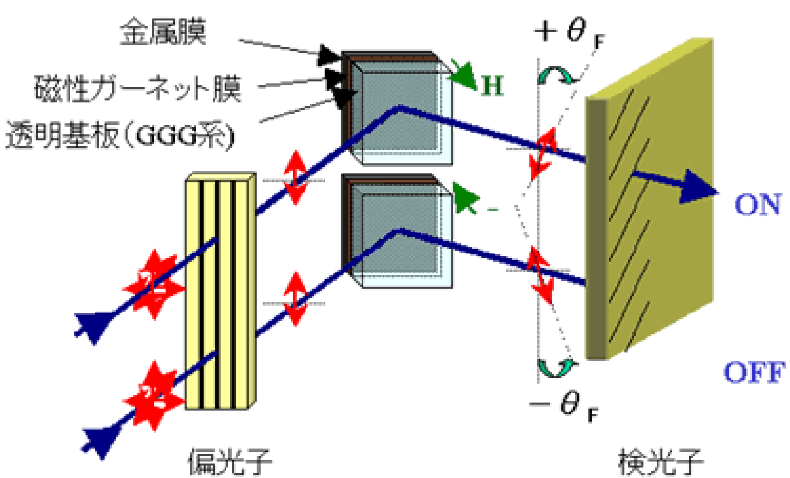
空間磁気光学変調器(MOSLM)

- 光画像処理に用いられるSLM (spatial light modulator)として通常液晶が用いられるが、応答速度が速いSLMが求められていました。
- 磁気光学効果を用いると高速応答が期待できます。
- 豊橋技科大の井上らは、MOSLMを開発しました。磁界の印加のためにWord線とBit線に電流を流し、合成磁界で磁化を反転するのです。

磁気光学空間光変調器



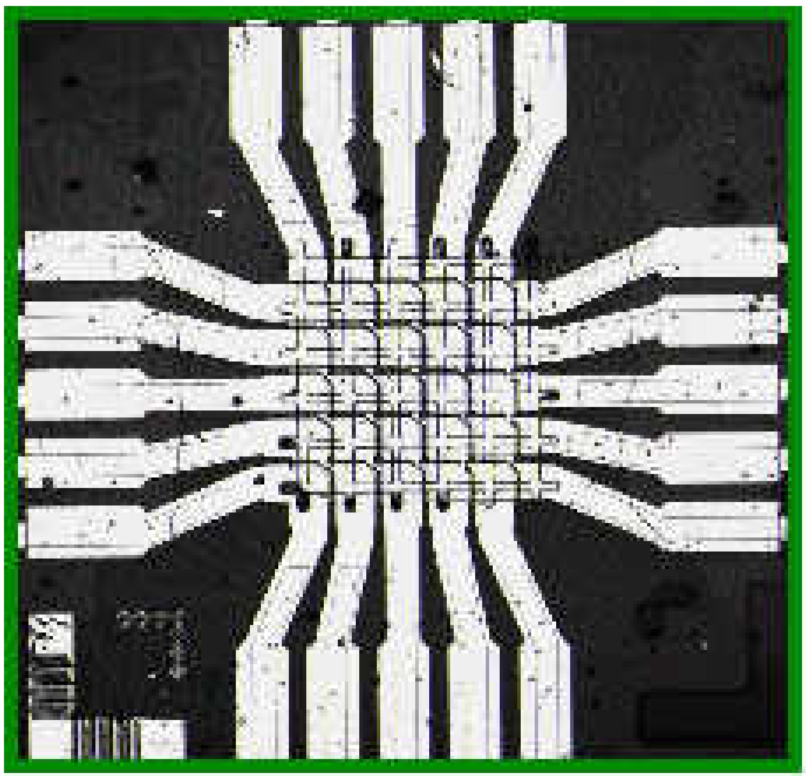


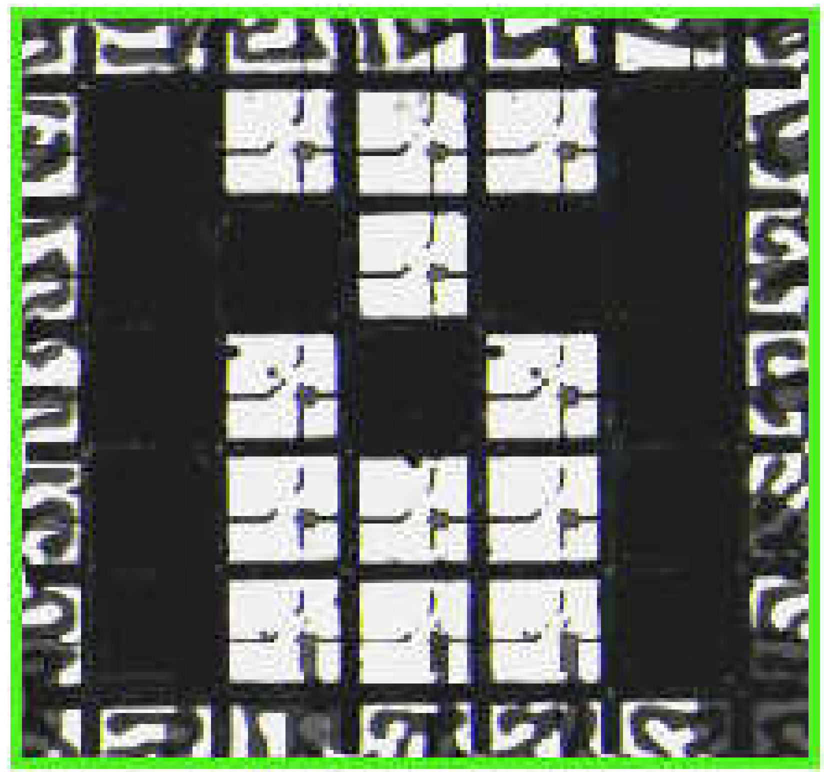


http://www.jst.go.jp/pr/info/info186/index.html

MOSLMの例

- 豊橋技科大井上研のHPより





2 磁気光学の応用まとめ

- 磁気光学効果を使って光で磁気を見るまたは測ることができます。MOディスク、MDは磁気光学効果を用いてデータを読み出します。
- 磁気光学効果を使って光を一方通行にしたり、光の強度を変調したりすることができます。

3.電磁気学に基づく磁気光学の理論

3.1 円偏光と旋光性･円二色性

3.2 電磁気学による磁気光学効果の理論

3.2.1 誘電率テンソル

3.2.2 マクスウェル方程式を解く

3.2.3 ファラデー効果の現象論

3.2.4 磁気カー効果の現象論

ここで学ぶこと

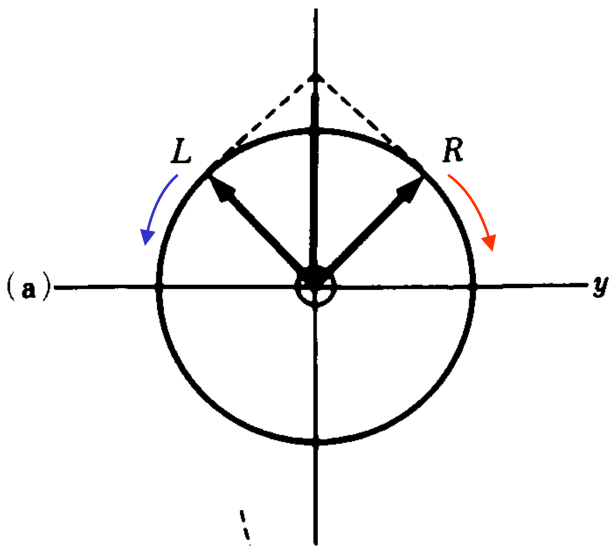
- この講義では磁気光学効果が媒体のどのような性質に基づいて生じるかをマクロな立場に立ってご説明します。
- ここでは媒体のミクロな性質には目をつぶって、媒体を連続体のように扱い、偏光が伝わる様子を電磁波の伝搬として記述します。
- 磁気光学効果は、左右円偏光に対して媒体の応答が異なることによって生じることを述べます。
- このとき媒体の応答を誘電率を使って表します。

3.1 円偏光と旋光性･円二色性

- 以下では旋光性や円二色性が左右円偏光に対する媒体の応答の差に基づいて生じることを説明します

直線偏光は左右円偏光の合成

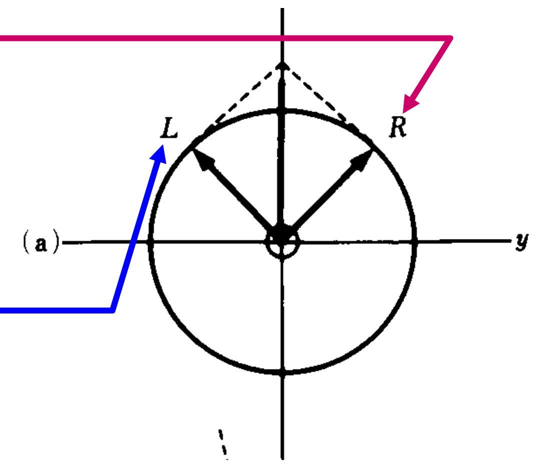
- 直線偏光の電界ベクトルの軌跡は図(a)のように、振幅と回転速度が等しい右円偏光Rと左円偏光Lとの合成で表されます。



図(a)直線偏光は等振幅等速度の左右円偏光に分解できる

式で書くと

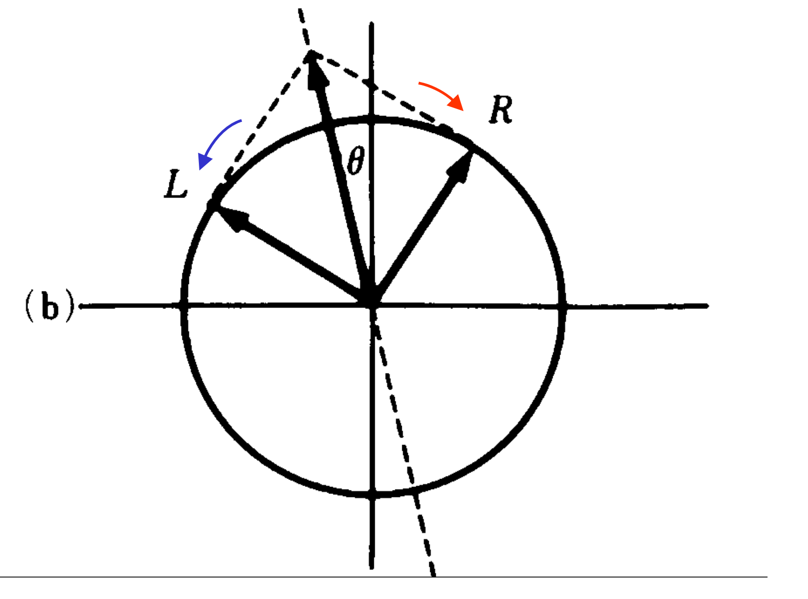
- $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0\exp(i\omega t)\,\boldsymbol{i}$
  ここに$\boldsymbol{i}$は$\boldsymbol{x}$方向の単位ベクトル
- 右円偏光の単位ベクトル$\boldsymbol{r}$は$(\boldsymbol{i}+i\boldsymbol{j})/2^{1/2}$
- 左円偏光の単位ベクトル$\boldsymbol{l}$は$(\boldsymbol{i}-i\boldsymbol{j})/2^{1/2}$
  $\boldsymbol{i}=(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{l})/$となるので
- $\boldsymbol{E}=2^{-1/2}\ \{\boldsymbol{E}_0\exp(i\omega t)\boldsymbol{r}+\boldsymbol{E}_0\exp(i\omega t)\boldsymbol{l}\}$



左右円偏光の位相が異なる場合

- 媒体を透過した後、図(b)のように左円偏光の位相が右円偏光の位相より進んでいたとすると、合成した電界ベクトルの軌跡も直線で、その向きはもとの偏光の向きかからから傾いています。
- これが旋光性です。
回転角は左右円偏光の
位相差の1/2です。

図 (b)媒体を通ることにより左円偏光の位相と右円偏光の位相が異なると偏光が回転します



式で書くと

- 右円偏光に対する屈折率n^+
- 左円偏光に対する屈折率n^-

とすると、

- 右円偏光の位相は$\omega n^+ z/c$
- 左円偏光の位相は$\omega n^- z/c$

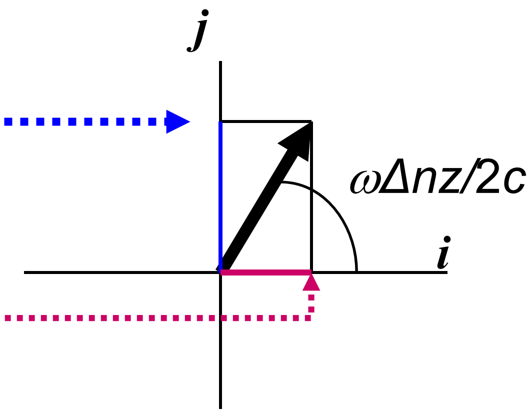
であるから右円偏光と左円偏光の位相差は$\omega(n^+ - n^-)z/c$

- この半分が回転角になります。

注：nは屈折率、κ(カッパと読む)は消光係数

ベクトルで書くと

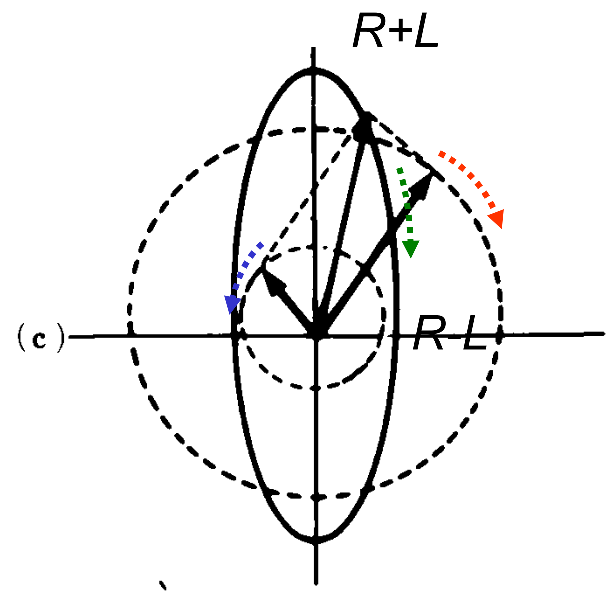
- $\boldsymbol{E}= 2^{-1/2}\boldsymbol{E}_0\ \{\exp(i\omega t)\boldsymbol{r}+\exp(i\omega t)\boldsymbol{l}\}$が
  右円偏光に対する屈折率n^+、左円偏光に対する屈折率n^- の環境を通過すると、
- $\boldsymbol{E}= 2^{-1/2}\boldsymbol{E}_0\ [\exp\{i\omega(t-n^+z/c)\}\boldsymbol{r}+\exp\{i\omega(t-n^-z/c)\}\boldsymbol{l}]$
  これを直交系に戻すと、
- $\boldsymbol{E}= 2^{1/2}\boldsymbol{E}_0\exp(i\omega t)\exp(-\,i\omega\, nz/c)$
  $\times\{\cos(\omega\Delta nz/2c)\boldsymbol{i}+\sin(\omega\Delta nz/2c)\boldsymbol{j}\}$
- ここに$\Delta n=n^+-n^-$, $n=(n^++n^-)/2$



左右円偏光の振幅が異なると

- 媒体を透過した後、（c）のように右円偏光と左円偏光のベクトルの振幅に差が生じると、合成ベクトルの軌跡は楕円になります。
- 楕円の短軸と長軸の比の $\tan^{-1}$が楕円率角です。

図(c)媒体を通ることにより左円偏光の振幅と右円偏光の振幅が異なると合成した軌跡は楕円になります



式で書くと

- 右円偏光に対する消光係数κ^{+}
- 左円偏光に対する消光係数κ^{-}

とすると、

- 右円偏光の振幅は$\exp(-\omega\kappa^{+}z/c)$
- 左円偏光の振幅は$\exp(-\omega\kappa^{-}z/c)$

屈折率は左右円偏光に対し同じであると仮定

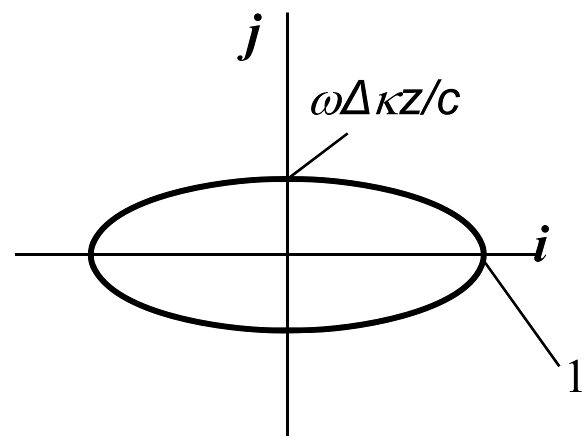
ベクトルで書くと

- $\boldsymbol{E} = 2^{-1/2}\boldsymbol{E}_0\ \{\exp(i\omega t)\boldsymbol{r} + \exp(i\omega t)\boldsymbol{l}\}$が

  右円偏光に対する消光係数κ^+、左円偏光に対する消光係数κ^-の環境を通過すると、
- $\boldsymbol{E} = 2^{-1/2}\boldsymbol{E}_0 \exp\{i\omega(t-nz/c)\}\ [\exp(-\omega\kappa^+ z/c)\ \boldsymbol{r} + \exp(-\omega\kappa^- z/c)\ \boldsymbol{l}]$

  これを直交系に戻すと、
- $\boldsymbol{E} \sim 2^{1/2}\boldsymbol{E}_0 \exp(i\omega t)\exp(-\omega\kappa z/c)\{\boldsymbol{i} - i\omega\Delta\kappa z/c\boldsymbol{j}\}$
- ここに$\Delta\kappa = \kappa^+ - \kappa^-,\ \kappa = (\kappa^+ + \kappa^-)/2$、

  また $\omega\Delta\kappa z/c << 1$ とする
- 楕円率角ηは$\eta = \tan^{-1}(\omega\Delta\kappa z/c)$



注:κ(カッパと読む)は消光係数

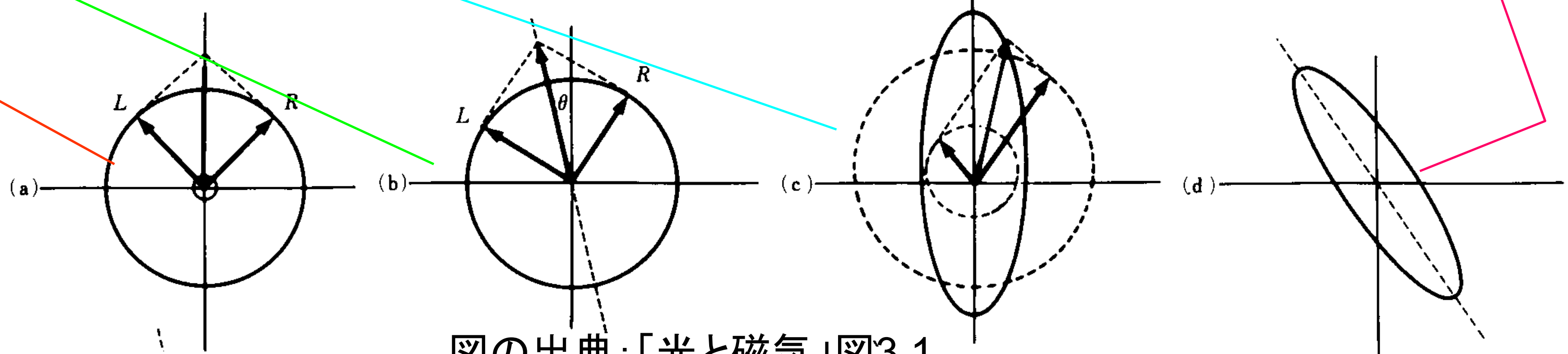
円偏光と磁気光学効果：まとめ

直線偏光は等振幅等速度の左右円偏光に分解できる

媒体を通ることにより左円偏光の位相と右円偏光の位相が異なると旋光する

媒体を通ることにより左円偏光の振幅と右円偏光の振幅が異なると楕円になる

一般には、主軸の傾いた楕円になる



図の出典：「光と磁気」図3.1

3.2 電磁気学に基づく磁気光学の理論

3.2.0 イントロ

3.2.1 誘電率テンソル

3.2.2 マクスウェル方程式を解く

3.2.3 ファラデー効果の現象論

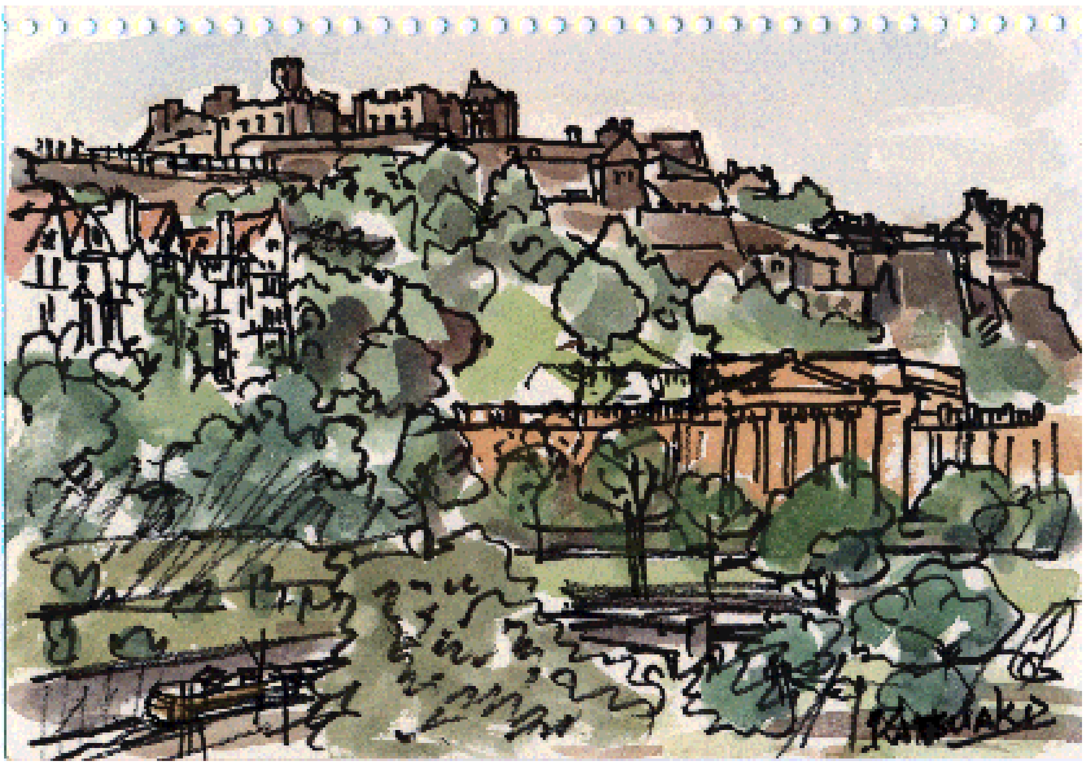
イントロ

- 連続媒体中の光の伝わり方はマクスウェルの方程式で記述されます。
- マクスウェルの方程式は、電磁波の電界と磁界との間の関係を与える連立微分方程式であると理解しておいてください。
- 詳しい取り扱いは次回講義で詳しく述べます。

$$rot\,\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\mu_0 \tilde{\mu} \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$$

$$rot\,\boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \tilde{\varepsilon} \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

James Clerk Maxwell



エジンバラ城を望む（佐藤勝昭画）

出生　1831年6月13日
エジンバラ

死去　1879年11月5日
ケンブリッジ

マクスウェル方程式

$$rot\ \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\mu_0 \tilde{\mu} \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$$

電磁誘導の法則

$$rot\ \boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \tilde{\varepsilon} \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

アンペールの法則

変位電流

3.2.1 誘電率テンソル

誘電率

- マクスウェルの方程式で表される電磁波の伝搬において、媒体の応答を与えるのが、比誘電率εです。
- 電束密度Dと電界Eの関係は
  $$\boldsymbol{D}=\varepsilon\varepsilon_0\boldsymbol{E}$$
  と表すことができます。ここにε_0は真空の誘電率で、$\varepsilon_0=8.854\times10^{-12}$ F/m です。

比透磁率は1として扱う。

- 光の伝搬を考える場合$\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{H}$と扱います。
すなわち、比透磁率μは1とします。
- 磁性体中の伝搬であるから比透磁率μは1ではないと考える人があるかも知れませんね。
- 光の振動数（10^{14}-10^{15}Hz)くらいの高い周波数になると巨視的な磁気モーメントは、磁界に追従できなくなるため、透磁率を$\mu\cdot\mu_0$としたときの比透磁率μは1として扱ってよいのです。μ_0は真空の透磁率で、$\mu_0 = 1.257\times10^{-6}$ H/mと与えられます。

誘電率テンソル

D も***E*** もベクトルなのでベクトルとベクトルの関係を与える量であるεは2階のテンソル量です。
2階のテンソルというのは、2つの添字をつかって表される量で、3×3の行列と考えてさしつかえありません。
(ここではテンソルを表すため記号～(チルダ)をつけます)

$$\boldsymbol{D} = \tilde{\varepsilon}\ \varepsilon_0 \boldsymbol{E}$$

$$D_i = \varepsilon_{ij}\varepsilon_0 E_j$$

テンソル要素を使って表現すると下の式のようになります。
繰り返す添え字について総和をとるというテンソル演算の約束に従っています。

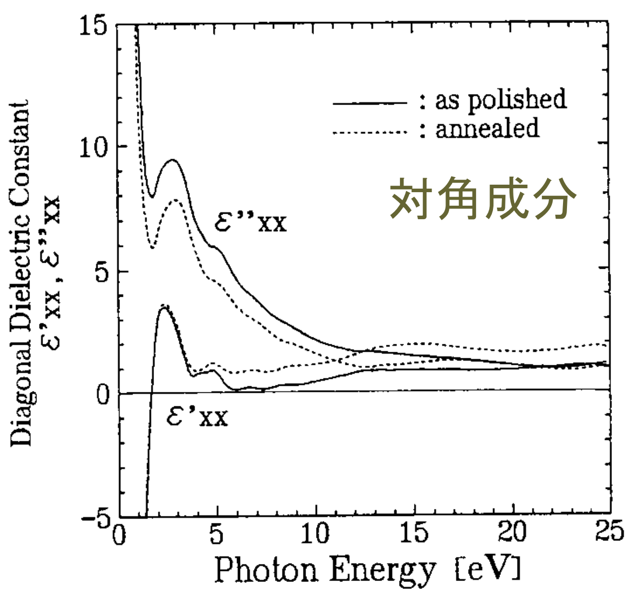
誘電率テンソルの一般的表示

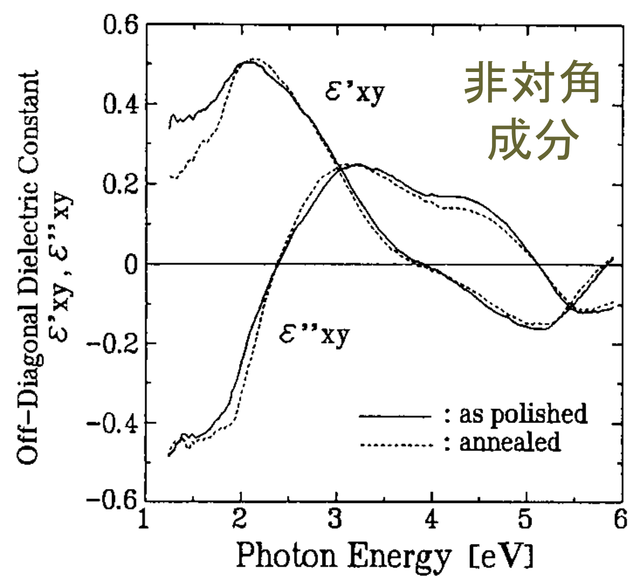
- 一般的な場合、誘電率テンソルは、下記のような9個のテンソル要素で表すことができます。各要素は複素数です。 $\varepsilon_{ij} = \varepsilon'_{ij} + i\varepsilon''_{ij}$

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

誘電率スペクトルの一例:PtMnSb

- 図をご覧下さい。これは私たちが測定したPtMnSbという強磁性体の磁気光学効果に関する磁気光学スペクトルです。
- 測定したのは反射スペクトルと磁気カー効果のスペクトルですが、ここには比誘電率テンソルの対角、非対角成分のスペクトルが示されてます。
- 左が誘電率テンソルの対角成分ε_{xx}、右が非対角成分ε_{xy}のスペクトルです。





図の出典:「光と磁気」図6.24

なぜ誘電テンソルを用いるの?

- 屈折率、反射率やカー回転角などは、入射角や磁化の向きに依存する量で、媒体固有の応答を表す量ではありません。これに対し、誘電率テンソルは媒体に固有の物理量です。
- また、誘電率テンソルは、物質中の電子構造や光学遷移の遷移行列に直接結びつけることができ、理論計算の結果とすぐに対応できる物理量です。

等方性の媒体の誘電率テンソル

- 媒体中の光の伝搬のしかたが光の進行方向によらないとき、その媒体は光学的に等方であるといいます。
- そのときの誘電率テンソルは、スカラーと同じなので、等しい3つの対角成分ε_{xx}のみで表せます。

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{xx} \end{pmatrix} = \varepsilon_{xx} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

異方性のある媒体の誘電率テンソル

- 磁化がないとき等方性であった媒体にz軸方向に磁化を持たせたとしますと、z軸を異方軸とする一軸異方性をもちます。（z軸に垂直な向きに関しては等方的）
- この場合、比誘電率のテンソルは、z軸のまわりの任意の角度の回転に対して不変となります。
- たとえば90°の回転C_4を施し次式となります。

$$C_4^{-1}\tilde{\varepsilon}C_4 = \tilde{\varepsilon} \qquad (3.10)$$

座標系の回転操作C4に対して、なぜ誘電率テンソルの回転が左辺のように表せるのかは、課題（1）としますので自分でやってみてください。

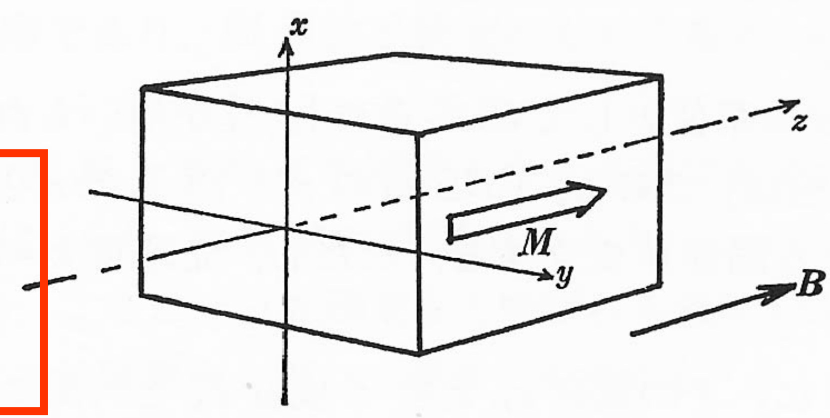


図 3. 2　座標軸と磁化の向き

図の出典：「光と磁気」図3.2

- (a)に実際にC_4の演算を施すと (b)となります。
- (a)=(b)として要素を比較すると式(3.11)が得られます。

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \qquad \text{(a)}$$

$$\tilde{\varepsilon}' = C_4^{-1}\tilde{\varepsilon}C_4 = \begin{pmatrix} \varepsilon_{yy} & -\varepsilon_{yx} & -\varepsilon_{yz} \\ -\varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xz} \\ -\varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \qquad \text{(b)}$$

$$\begin{gathered} \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{yx} = -\varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{zy} = 0 \end{gathered} \qquad (3.11)$$

テンソル(a)にC4を操作して(b)になることを確かめて下さい。次にそれにもとづき(3.11)を証明して下さい。これを課題（2）とします。

ε_{zz}については何ら制約がありません。$\varepsilon_{xx}=\varepsilon_{zz}$である必要はありません。

磁化のある媒質の誘電率テンソル

- 従って、等方性媒質に磁化を付与したときの非誘電率εテンソルはε_{xx}, ε_{xy}, ε_{zz}の3つの要素だけを使って、次のように簡単に書けます。

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ -\varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \qquad (3.12)$$

よくある質問

- 誘電率テンソルの対角・非対角とは何ですか

  A:添え字がxx, yy, zzのように対角線上に来るものを対角成分、xy, yz, zxのように対角線上にないものを非対角成分といいます。

- もともと異方性がある場合の誘電率テンソルはどのように考えればよいのでしょう

  A: もともと1軸異方性があるとき、その対称軸に平行な磁化がある場合は、今やった等方性の場合と同じですが、磁化が任意の方向を向いているときは、全ての非対角成分が有限の値をとります。

よくある質問

- 誘電率テンソルはどのように測定するのですか。
  A:対角成分はエリプソメトリなど通常の分光学で、n、κを求め、$\varepsilon_{xx}'=n^2-\kappa^2$, $\varepsilon_{xx}''=2n\kappa$によって計算します。
  - 非対角成分については、磁気光学効果測定装置を用いて回転角θ、楕円率ηのスペクトルを求め、上に述べた光学定数n,κを用いて計算で求めます。

$$\varepsilon_{xy}' = -\frac{2c}{\omega l}\left(n\eta + \kappa\theta\right)$$

$$\varepsilon_{xy}'' = -\frac{2c}{\omega l}\left(\kappa\eta - n\theta\right)$$

（*Faraday効果の場合*）

注：nは屈折率、κ(カッパと読む)は消光係数

磁化Mの関数としての誘電率

- さて、磁気光学効果においての各成分はMの関数であるから、 は次式のように表せるはずです。

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}(M) & \varepsilon_{xy}(M) & 0 \\ -\varepsilon_{xy}(M) & \varepsilon_{xx}(M) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz}(M) \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

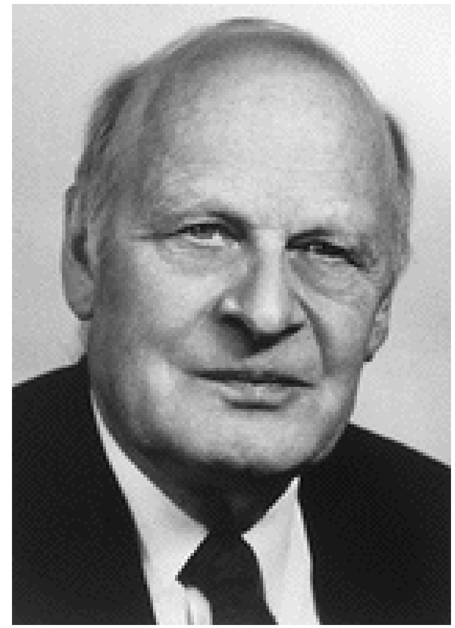
- $\varepsilon_{ij}(M)$を次式のようにMでべき級数展開します。

$$\varepsilon_{ij}(M) = \varepsilon_{ij}^{(0)} + \sum_{n} \frac{1}{n!} \varepsilon_{ij}^{(n)} M^{n} \quad (3.14)$$

Lars Onsager

- Norwegian-American chemist and physicist.

The Nobel Prize in Chemistry 1968



磁化がある場合は非相反になる

$$\varepsilon_{ij}(-M) = \varepsilon_{ji}(M)$$

出生　1903年11月27日
オスロ

死去　1976年10月5日

誘電率の成分と磁化依存性

- Onsagerの式 $\varepsilon_{ij}(-M) = \varepsilon_{ji}(M) \quad (3.15)$
  を適用すると、対角成分は
  $$\varepsilon_{xx}(M) = \varepsilon_{xx}(-M)$$
  となり、Mについての偶関数であることが分かる。
- 一方、非対角成分については
  $$\varepsilon_{xy}(M) = -\varepsilon_{yx}(-M)$$
  が成り立つので、Mについて奇関数であることがわかる

誘電率テンソルの磁気応答

- 対角成分は***M***の偶数次のみ、非対角成分は***M***の奇数次のみで展開できます。

$$\varepsilon_{xx}(M) = \varepsilon_{xx}{}^{(0)} + \sum_n \varepsilon_{xx}^{(2n)} M^{2n}/(2n)!$$
$$\varepsilon_{xy}(M) = \sum_n \varepsilon_{xy}^{(2n+1)} M^{2n+1}/(2n+1)! \qquad (3.16)$$
$$\varepsilon_{zz}(M) = \varepsilon_{zz}{}^{(0)} + \sum_n \varepsilon_{zz}^{(2n)} M^{2n}/(2n)!$$

- ε_{xy} (***M***)がファラデー効果やカー効果をもたらし、ε_{xx} (***M***)と ε_{zz} (***M***)の差が磁気複屈折（コットン・ムートン効果）の原因となります。

誘電率と導電率

- 電流密度と電界の関係は次式であらわされます。

$$J = \tilde{\sigma} E$$

$$J_i = \sigma_{ij} E_j$$

- 導電率（電気伝導率）のテンソルは

$$\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

で表されます。

誘電率と導電率の関係

- 誘電率と導電率には右の式で表される関係があります。

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} + i\frac{\sigma_{ij}}{\omega\varepsilon_0}$$

- 成分で書くと
  - 対角成分は → $\varepsilon_{xx} = 1 + i\frac{\sigma_{xx}}{\omega\varepsilon_0}$
  - 非対角成分は → $\varepsilon_{xy} = i\frac{\sigma_{xy}}{\omega\varepsilon_0}$
- 誘電率の実数部・虚数部は導電率のそれぞれ虚数部・実数部に対応します。

誘電率と導電率のどちらを使うか

- 誘電率εと導電率σには簡単な関係が成り立つので、媒質の光応答を表すときに、ε、σのいずれを用いて記述してもよいのですが、一般には、金属を扱うときはσを、絶縁体であればεを用いるのが普通です。
- 金属のεは、ω→0の極限すなわち直流においては自由電子の遮蔽効果のために発散してしまうのに対し、σは有限の値に収束するので都合がよいからです。

課題

- z方向の磁化をもつ場合の比誘電率テンソルの要素間に(3.11)式が成り立ち、その結果、誘電率テンソルは(3.12)式で与えられることを導いてください。

$$
\begin{gathered}
\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} \\
\varepsilon_{yx} = -\varepsilon_{xy} \\
\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{zy} = 0
\end{gathered}
\qquad (3.11)
$$

$$
\tilde{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ -\varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \qquad (3.12)
$$

3.2.1 まとめ

- 等方性の媒質がz軸方向の磁化をもったとき、その比誘電率テンソルは、3つの成分で表すことができることを学びました。
- 誘電率テンソルの対角成分は磁化の偶関数で表されるのに対し、非対角成分は磁化の奇関数で表されることを学びました。

次のステップ

- 次のステップでは、この誘電率テンソルをマクスウェルの方程式に代入して複素屈折率*N*の固有値を求めます。

固有方程式は
右の式になるので任
意のEに対して式が
成立する条件から
複素屈折率の固有値
が求められます。

$$\begin{pmatrix} \hat{N}^2 - \varepsilon_{xx} & -\varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \hat{N}^2 - \varepsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0$$

$$\hat{N}_{\pm}^2 = \varepsilon_{xx} \pm i\varepsilon_{xy}$$

ここでN_+とN_-に対応する固有関数はそれぞれ右円偏光、左円偏光であることが導かれます。さらに、非対角成分ε_{xy}が無ければ、左右円偏光の応答に差がなく、光学活性が生じないということを学びます。

3.2.2 マクスウェル方程式を解く

3.2.2で学ぶこと

- 光の伝搬とマクスウェルの方程式
  - 固有解：波動解、固有値：複素屈折率
- ファラデー配置の場合の固有値と固有状態
  - ２つの固有値と対応する固有状態（円偏光）
- ファラデー効果の現象論
  - ファラデー効果と誘電率テンソル
- フォークト配置の場合の固有値と固有状態
  - コットンムートン効果：磁気誘起の複屈折

•3.2.2では光と磁気第3章3.3と3.4に沿ってお話しします。

マクスウェルの方程式

- 光の電界ベクトルを$\boldsymbol{E}$ 、電束密度ベクトルを$\boldsymbol{D}$ 、磁界ベクトルを$\boldsymbol{H}$、磁束密度ベクトルを$\boldsymbol{B}$、電流を$\boldsymbol{J}$とすると、次の関係が成立します。

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} &= -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\ \mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} &= \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{J} \end{aligned} \qquad (3.17)$$

（SI単位系）

マクスウェル方程式をEとHで表す

- 簡単のため，$\boldsymbol{J}$=0と置きます。

[つまり､伝導電流を分極電流（変位電流）の中に繰り込みます]

- $\boldsymbol{B}$と$\boldsymbol{H}$､$\boldsymbol{D}$と$\boldsymbol{E}$の関係式が得られます。

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}$$

$$\boldsymbol{D} = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \varepsilon_0 \boldsymbol{E}$$

誘電率テンソル

- (3.17)に代入すると次の関係式が得られます。

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \quad (3.18)$$

式(3.18)においては、微分方程式が2個、変数もEとHの２個ですから、解を求めることが出来ます。

マクスウェル方程式を解く:２つの方法

1. １つは、第2式をtで1回偏微分し$\partial/\partial t$とrotの順番を入れ替え、$\partial \boldsymbol{H}/\partial t$に第1式を代入します。この後、exp($-i\omega t+iKr$)の形の波動式を代入し、$\boldsymbol{E}$についての２次方程式を得ます。
2. もう1つは、$\boldsymbol{E}$と$\boldsymbol{H}$に先にexp($-i\omega t+i\boldsymbol{K}\boldsymbol{r}$)の形の波動関数を代入し、通常の連立1次方程式にします。ここで$\boldsymbol{H}$を消去すると$\boldsymbol{E}$についての２次方程式を得ます。(教科書「光と磁気」では後のやり方を使っています。)

マクスウェル方程式を解く [1]

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\,\varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \qquad (3.18)$$

- 第2式をtで1回偏微分し $\partial/\partial t$とrotの順番を入れ替え、$\partial \boldsymbol{H}/\partial t$に第1式を代入します。この後、$\exp(-i\omega t+iKr)$の形の波動式を代入し、$\boldsymbol{E}$についての２次方程式を得ます。

マクスウェル方程式を解く [1]-1

- (3.18)の第2式の両辺をtで偏微分します。

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\,\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

- $\partial/\partial t$とrotの順番を入れ替えます。

$$\mathrm{rot}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\,\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

- ここに(3.18)の第1式

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}$$ を代入します。

マクスウェル方程式を解く [1]-2

これより　$\mathrm{rot}(-\dfrac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}) = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\varepsilon_0\dfrac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}$　が得られ、

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} = -\frac{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$ となります。

ここで、$\varepsilon_0\mu_0 = \dfrac{1}{c^2}$ という関係を用いました。

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\frac{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

をマクスウェルの方程式ということがあります。

マクスウェル方程式を解く [1]-3

- ここで、rot、grad、divの間に成り立つ次の公式を用います。

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\boldsymbol{E} - \nabla^2 \boldsymbol{E}$$

- この結果Eについての2階の微分方程式が得られます。

$$\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\boldsymbol{E} - \nabla^2 \boldsymbol{E} = -\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\,\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

- この式に次の波動の式 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \exp(-i\omega t)\cdot\exp(i\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r})$

  を代入するとEについての方程式(3.20)が得られます。

$$(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{K})\boldsymbol{K} - \left|\boldsymbol{K}\right|^2 \boldsymbol{E} + (\omega / c)^2 \tilde{\varepsilon}\boldsymbol{E} = 0 \qquad (3.20)$$

自習課題（1）

- 始めにrot Aにrotを及ぼすとどうなるか確かめてください。（物理数学などで学んだはずです）
  rot rot A=∇×(∇×A)=grad(divA)-∇^2A
- 次に、

$$\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\boldsymbol{E} - \nabla^2 \boldsymbol{E} = -\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

に波動の式　$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \exp(-i\omega t) \cdot \exp(i\boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{r})$　を代入し

$$(\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{K})\boldsymbol{K} - |\boldsymbol{K}|^2 \boldsymbol{E} + (\omega / c)^2 \tilde{\varepsilon} \boldsymbol{E} = 0$$

が成立することを確かめてください。

マクスウェル方程式を解く [2]

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\,\varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \qquad (3.18)$$

– EとHに、$\exp(-i\omega t+iKr)$の形の波動関数を代入し、通常の連立1次方程式にします。ここでHを消去するとEについての２次方程式を得ます。

マクスウェル方程式を解く [2]-1

- ここでは、微分演算を使わない方法を紹介します。EおよびHについての波動の式は、波数ベクトル$\boldsymbol{K}$として

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \exp(-i\omega t)\cdot\exp(i\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r})$$
$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 \exp(-i\omega t)\cdot\exp(i\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r}) \qquad (3.19)$$

のように表すことができます。ここに$\boldsymbol{E}_0$, $\boldsymbol{H}_0$は時間や距離に依存しない定数ベクトルです。

- 式(3.19)をマクスウェルの方程式(3.18)に代入すると、

$$\boldsymbol{K}\times\boldsymbol{E} = \omega\mu_0\boldsymbol{H}$$
$$\boldsymbol{K}\times\boldsymbol{H} = -\omega\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\boldsymbol{\varepsilon_0}\boldsymbol{E}$$

となります。

マクスウェル方程式を解く [2]-2

- 両式から***H***を消去し、

$$\boldsymbol{K}\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{K}\times\frac{1}{\omega\mu_0}(\boldsymbol{K}\times\boldsymbol{E})=\frac{1}{\omega\mu_0}\boldsymbol{K}\times\boldsymbol{K}\times\boldsymbol{E}=-\omega\tilde{\varepsilon}\varepsilon_0\boldsymbol{E}$$

固有方程式として

$$(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{K})\boldsymbol{K}-\left|\boldsymbol{K}\right|^2\boldsymbol{E}+(\omega/c)^2\tilde{\varepsilon}\boldsymbol{E}=0 \qquad (3.20)$$

が得られます。

ここに***K***は波数ベクトルです。

自習課題（2）

- 式(3.19)を式(3.18)に代入して式(3.20)を導いてください。ここで、ベクトル積の公式

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{A})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A})\boldsymbol{C}$$

を利用してください。

固有方程式を解く [1]

- いずれの手続きでも式(3.20)が導かれました。

$$(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{K})\boldsymbol{K}-|\boldsymbol{K}|^2\boldsymbol{E}+(\omega/c)^2\tilde{\varepsilon}\boldsymbol{E}=0 \qquad (3.20)$$

それでは(3.20)を解いて***K***の固有値と対応する電界ベクトル***E***の固有関数を求めましょう。

- ここで複素屈折率、すなわち、$\hat{N}=n+i\kappa$ を導入します。ここにnは屈折率、κは消光係数です。
- 媒質中において波数Kは

[注] $$K=\omega\hat{N}/c=\omega n/c+i\omega\kappa/c$$

実数部は空間的な波の波長を与えます

虚数部は波の減衰を与えます。

[注]　波数Kは$2\pi/\lambda'$となる。ここにλ'は媒質中での波長で、媒質中での光速をc'とするとω/c'と表される。媒質中での光速c'は屈折率をnとするとc/nで与えられるから、$K=\omega n/c$である。ここで屈折率を拡張して複素屈折率N、すなわち$n+i\kappa$を導入すると、上の式となる。

複素屈折率$n+i\kappa$

- 電磁波の空間変化をexp(iKz)で表します。
- $K=\omega N/c=\omega (n+i\kappa)/c$とします。
- exp(iKz)=exp($i\omega nz/c$)exp(- $\omega\kappa z/c$)と書けます。
- この波動は、振幅が距離zとともに振動しながら減衰する波を表します。
- 光の強度の減衰を表すときには| exp(iKz)|^2 を考えます。 | exp(iKz)|^2 =exp(-$2\omega\kappa z/c$)
- これを吸収係数α を用いてexp(-αz)に等しいと置くと、 $\alpha= 2\omega\kappa/c=4\pi\kappa/\lambda$と表すことができます。

固有方程式を解く [2]

- 波数ベクトルの向きに平行で長さが$\hat{N}$ であるような屈折率ベクトル $\hat{\boldsymbol{N}}$ を用いると、(3.19)の第１式は

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \exp\{-i\omega(t - \hat{\boldsymbol{N}} \cdot \boldsymbol{r} / c)\} \qquad (3.21)$$

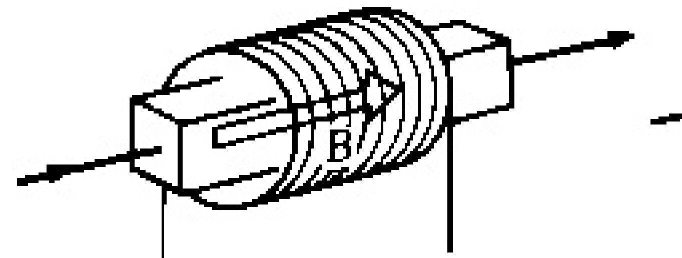
となり、固有方程式(3.20)は

$$\hat{N}^2 \boldsymbol{E} - (\boldsymbol{E} \cdot \hat{\boldsymbol{N}})\hat{\boldsymbol{N}} - \tilde{\varepsilon}\boldsymbol{E} = 0 \qquad (3.22)$$

によって記述できます。

- 以下では、第2回に述べた２つの配置(ファラデー配置とフォークト配置)について固有値を求めます。

ファラデー配置の場合



ファラデー配置

- 磁化がz軸方向にあるとして、
  z軸に平行に進む波(***N*** //z)に対して式(3.21)は

$$E = E_0 \exp\{-i\omega(t - \hat{N}z / c)\} \qquad (3.23)$$

- と表されます。固有方程式(3.22)は

$$\begin{pmatrix} \hat{N}^2 - \varepsilon_{xx} & -\varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \hat{N}^2 - \varepsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0 \qquad (3.24)$$

と書けます。この式は下に2式に分けられます。

$$\begin{pmatrix} \hat{N}^2 - \varepsilon_{xx} & -\varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} & \hat{N}^2 - \varepsilon_{xx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = 0, \ (3.24') \quad -\varepsilon_{zz} E_z = 0 \ (3.24'')$$

永年方程式

- 式(3.24’)がEの如何によらず成立するには、

$$\begin{vmatrix} \hat{N}^2-\varepsilon_{xx} & -\varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} & \hat{N}^2-\varepsilon_{xx} \end{vmatrix}=0$$

（3．25）

$$\Rightarrow \left(\hat{N}^2-\varepsilon_{xx}\right)^2+\varepsilon_{xy}^2=0$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\hat{N}^2-\varepsilon_{xx}\right)^2=-\varepsilon_{xy}^2=\left(i\varepsilon_{xy}\right)^2$$

- これより、N^2の固有値として2個の値

$$\hat{N}_\pm^2=\varepsilon_{xx}\pm i\varepsilon_{xy}$$

（3．26）

- を得られます。これらの固有値に対応する固有関数は、

$$E_\pm=\frac{E_0}{2}(i\pm \mathrm{i}j)\exp\{-\mathrm{i}\omega(t-\frac{\hat{N}_\pm}{c}z)$$

（3．27）

- $\boldsymbol{E}$+、$\boldsymbol{E}$-は、それぞれ、右円偏光、左円偏光に対応します。

$\boldsymbol{E}^{+}$、$\boldsymbol{E}^{-}$は、それぞれ、右円偏光、左円偏光に対応

$$E_{+}=\frac{E_0}{2}(\boldsymbol{i}+\mathrm{i}\,\boldsymbol{j})\exp(-\mathrm{i}\omega t)$$

実数部のみを考えると

$$\mathrm{Re}(E_{+})=\frac{E_0}{2}\{\cos\omega t\,\boldsymbol{i}+\sin\omega t\,\boldsymbol{j}\}$$

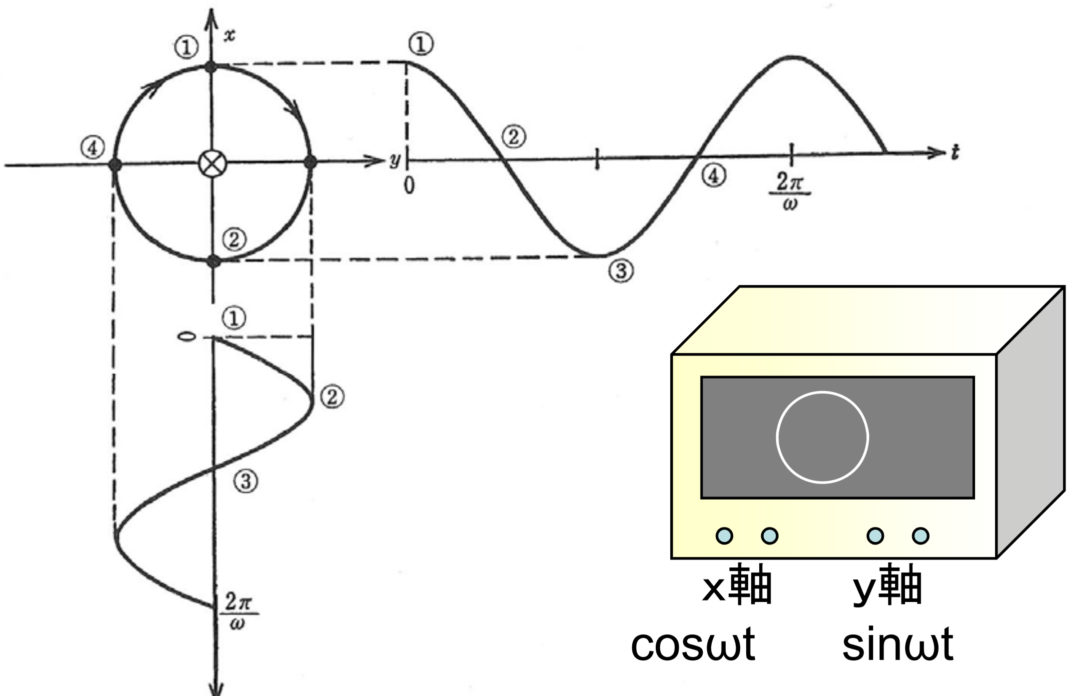


図 3.3　$E_{+}=(E_0/\sqrt{2})(\boldsymbol{i}+\mathrm{i}\boldsymbol{j})\exp\{-\mathrm{i}\omega(t-\hat{N}_{+}z/c)\}$ が右円旋光であること

- 直交する2つの直線偏光の位相が90度異なっているときに合成したベクトルの軌跡は円になります。
- x軸にcosωt、y軸にsin ωtを入力したときのオシロスコープのリサージュ波形を思い出してください。

図の出典：佐藤勝昭「光と磁気」

課題

- Z軸に平行に進む波に対して固有方程式(3.22)は(3.24)になること、および、Eの如何に関わらず成立するには(3.25)が成立すること、固有値が(3.26)で与えられることを導いてください。

$$\begin{pmatrix} \hat{N}^2-\varepsilon_{xx} & -\varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \hat{N}^2-\varepsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_{zz} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}=0 \qquad (3.24)$$

$$\begin{vmatrix} \hat{N}^2-\varepsilon_{xx} & -\varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} & \hat{N}^2-\varepsilon_{xx} \end{vmatrix}=0 \qquad (3.25)$$

$$\hat{N}_{\pm}^2=\varepsilon_{xx}\pm i\varepsilon_{xy} \qquad (3.26)$$

3.2.2のまとめ

- 光の伝搬をマクスウェルの方程式で記述すると，磁化された等方性物質の複素屈折率は

  $$\hat{N}_{\pm}^{2} = \varepsilon_{xx} \pm i\varepsilon_{xy}$$

  で与えられる2つの固有値をとり，それぞれが右円偏光および左円偏光に対応します．

  （ここに，ε_{xx}は誘電テンソルの対角成分，ε_{xy}は非対角成分です．）

- もしε_{xy}が0であれば，円偏光は固有関数ではなく，磁気光学効果は生じません．

3.2.3 ファラデー効果の現象論

ファラデー効果の現象論

- 3.2.2に述べたようにテンソルの非対角成分が存在すると、物質の左右円偏光に対する応答の違いを生じ、その結果ファラデー効果が生じます。ファラデー効果の回転角、楕円率などが誘電テンソルεの成分を使ってどのように書き表せるかを述べます。
- 結論から先に述べると、ファラデー回転角φ_F、ファラデー楕円率η_Fはε_{xy}の実数部と虚数部との一次結合で与えられることが導かれます。
  - まず，右円偏光および左円偏光に対する屈折率$n+$と$n-$，消光係数$\kappa+$と$\kappa-$ およびε_{xy}との関係からスタートします。

左右円偏光に対する光学定数の差と誘電率テンソルの成分の関係

- すでに述べたように、磁化と平行に進む光の複素屈折率の固有値は

$\hat{N}_{\pm}^{2} = \varepsilon_{xx} \pm i\varepsilon_{xy}$ (3.26) と書けますが、複号を別々に書くと、

$\hat{N}_{+} = n_{+} + i\kappa_{+} \quad \hat{N}_{-} = n_{-} + i\kappa_{-}$ となります。

ここで、

$$\Delta n = n_{+} - n_{-}; \Delta\kappa = \kappa_{+} - \kappa_{-}; \; n = \frac{n_{+} + n_{-}}{2}; \kappa = \frac{\kappa_{+} + \kappa_{-}}{2}$$

という置き換えをすると、
$$\boxed{\begin{array}{l} n_{+} = n + \Delta n/2; \quad n_{-} = n - \Delta n/2 \\ \kappa_{+} = \kappa + \Delta\kappa/2; \quad \kappa_{-} = \kappa - \Delta\kappa/2 \end{array}}$$
となるので、

$$\begin{aligned} \hat{N}_{+} &= n_{+} + i\kappa_{+} = (n + \Delta n/2) + i(\kappa + \Delta\kappa/2) \\ &= (n + i\kappa) + (\Delta n + i\Delta\kappa)/2 \end{aligned}$$

左右円偏光に対する光学定数の差ΔNと誘電率テンソルの成分の関係（1）

$$\hat{N}_{\pm} = n \pm \frac{\Delta n}{2} + i\left(\kappa \pm \frac{\Delta\kappa}{2}\right) = (n + i\kappa) \pm \frac{1}{2}(\Delta n + i\Delta\kappa) \equiv N \pm \frac{1}{2}\Delta N \qquad (3.37)$$

ここに $\Delta N = N_{+} - N_{-} = \Delta n + i\Delta\kappa$ (3.38)

- この$N_{\pm}$を(3.26)に代入して

$$\hat{N}_{\pm}^{2} = \left(\hat{N} \pm \Delta\hat{N}/2\right)^{2} \approx \hat{N}^{2} \pm \hat{N}\Delta\hat{N} = \varepsilon_{xx} \pm i\varepsilon_{xy} \qquad (3.26')$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \varepsilon'_{xx} = n^{2} - \kappa^{2};\ \ \varepsilon''_{xx} = 2n\kappa \\ \varepsilon'_{xy} = n\Delta\kappa + \kappa\Delta n \quad \varepsilon''_{xy} = \kappa\Delta\kappa - n\Delta n \end{array}} \qquad (3.39)$$

自習課題(3)

- 式(3.39)の関係式を導いてみよう。

ヒント　式(3.26)の第1式　$N_+^2 = \varepsilon_{xx} + i\varepsilon_{xy}$　に

$N_+ = n_+ + i\kappa_+$、$\varepsilon_{xx} = \varepsilon'_{xx} + i\varepsilon''_{xx}$, $\varepsilon_{xy} = \varepsilon'_{xy} + i\varepsilon''_{xy}$ を代入すると

$(n_+ + i\kappa_+)^2 = \varepsilon'_{xx} + i\varepsilon''_{xx} + i(\varepsilon'_{xy} + i\varepsilon''_{xy})$が得られる。

これに、$n_+ = n + \Delta n/2$, $\kappa_+ = \kappa + \Delta\kappa/2$を代入し、

Δnおよび$\Delta\kappa$について１次の項のみを考えると、

$$n^2 - \kappa^2 + n\Delta n - \kappa\Delta\kappa + i(2n\kappa + n\Delta\kappa + \kappa\Delta n) = \varepsilon'_{xx} - \varepsilon''_{xy} + i(\varepsilon''_{xx} + \varepsilon'_{xy})$$

同様に　$N_-^2 = \varepsilon_{xx} - i\varepsilon_{xy}$　について、

$$n^2 - \kappa^2 - n\Delta n + \kappa\Delta\kappa + i(2n\kappa - n\Delta\kappa - \kappa\Delta n) = \varepsilon'_{xx} + \varepsilon''_{xy} + i(\varepsilon''_{xx} - \varepsilon'_{xy})$$

これらについて、実数部同士、虚数部同士を比較することによって式(3.39)が得られる。

左右円偏光に対する光学定数の差ΔNと誘電率テンソルの成分の関係（1）

- Δnと$\Delta\kappa$をε_{xy}を使って表すと次式になります。

$$\Delta n = \frac{\kappa\varepsilon'_{xy} - n\varepsilon''_{xy}}{n^2+\kappa^2};\quad \Delta\kappa = \frac{n\varepsilon'_{xy} + \kappa\varepsilon''_{xy}}{n^2+\kappa^2} \qquad (3.40)$$

- ΔNに書き直すと

$$\Delta\hat{N} = \Delta n + i\Delta\kappa = \frac{i(n-i\kappa)(\varepsilon'_{xy}+i\varepsilon''_{xy})}{n^2+\kappa^2} = \frac{i\varepsilon_{xy}}{\sqrt{\varepsilon_{xx}}} \qquad (3.41)$$

こんな導き方もできます。

$$\boxed{\Delta\hat{N} = \hat{N}_+ - \hat{N}_- = \sqrt{\varepsilon_{xx}+i\varepsilon_{xy}} - \sqrt{\varepsilon_{xx}-i\varepsilon_{xy}} \approx i\frac{\varepsilon_{xy}}{\sqrt{\varepsilon_{xx}}}}$$

ファラデー効果をΔn, $\Delta\kappa$で表す(1)

- 図3.4に示すようにxz面を振動面とする直線偏光$\boldsymbol{E}_{\mathrm{in}}$が物質に入射したとします。ここに光の進行方向はz軸の向きである。x軸の単位ベクトルを$\boldsymbol{i}$, y軸の単位ベクトルを$\boldsymbol{j}$とすると入射光の電界ベクトルは次式で与えられます。

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{in}}=\boldsymbol{E}_0\exp(-i\omega t)\boldsymbol{i} \qquad (3.42)$$

- ここで、右円偏光単位ベクトル$\boldsymbol{r}$と、左円偏光単位ベクトル$\boldsymbol{l}$を次式のように定義します。

$$\boldsymbol{r}=(\boldsymbol{i}+i\boldsymbol{j})/2^{1/2},\ \boldsymbol{l}=(\boldsymbol{i}-i\boldsymbol{j})/2^{1/2} \qquad (3.43)$$

- 式(3.42)を$\boldsymbol{r}$と$\boldsymbol{l}$を使って表すと、

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{in}}=\boldsymbol{E}_0\exp(-i\omega t)(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{l}) \qquad (3.44)$$

- のように表されます。

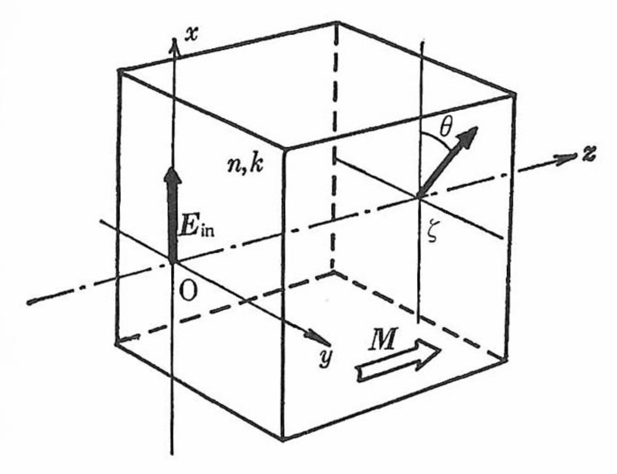


図 3.4 座標系のとり方
光の進行方向(=磁化の方向)を z 軸正の向きに，入射直線偏光の電界の振動方向を x 軸にとる．回転角は図の方向を正とする．

図の出典：佐藤勝昭「光と磁気」

ファラデー効果をΔn, $\Delta\kappa$で表す(2)

- 物質中の複素屈折率は右円偏光に対してはN_+、左円偏光に対してはN_-である。表面を$z=0$として物質中の$z=\zeta$の位置では，位相がそれぞれ $\mathrm{i}\omega N_+\zeta/c$ および $\mathrm{i}\omega N_-\zeta/c$ だけ進むので、

$$\boldsymbol{E}_{out}=\frac{E_0}{\sqrt{2}}\exp(-i\omega t)\left\{\exp(i\omega\hat{N}_+\zeta/c)\boldsymbol{r}+\exp(i\omega\hat{N}_-\zeta/c)\boldsymbol{l}\right\}$$

$$=\frac{E_0}{\sqrt{2}}\exp\left\{-i\omega(t-\frac{\hat{N}}{c}\zeta)\right\}\left\{\exp(i\omega\frac{\Delta\hat{N}}{2c}\zeta)\boldsymbol{r}+\exp(-i\omega\frac{\Delta\hat{N}}{2c}\zeta)\boldsymbol{l}\right\} \tag{3.45}$$

と表されます。第2式で は

$N_+=N+\Delta N/2,\ N_-=N-\Delta N/2$ と置き換えました。

ファラデー効果をΔn, $\Delta\kappa$で表す(3)

- ここで、ふたたび、もとのxy座標系に戻すと

$$E_{out} = \frac{E_0}{2}\exp\left\{-i\omega(t-\frac{N}{c}\zeta)\right\}\times$$
$$\left[\left\{\exp(i\omega\frac{\Delta N}{2c}\zeta)+\exp(-i\omega\frac{\Delta N}{2c}\zeta)\right\}\boldsymbol{i}+i\left\{\exp(i\omega\frac{\Delta N}{2c}\zeta)-\exp(-i\omega\frac{\Delta N}{2c}\zeta)\right\}\boldsymbol{j}\right]$$

(3.45')

さらに式(3.38)を使って書き直すと

$$E_{out} = E_0\exp\left\{-i\omega(t-\frac{N}{c}\zeta)\right\}\times$$
$$\left[\left\{\cos(\frac{\omega\Delta n}{2c}\zeta)-i\frac{\omega\Delta\kappa}{2c}\zeta\sin(\frac{\omega\Delta n}{2c}\zeta)\right\}\boldsymbol{i}-\left\{\sin(\frac{\omega\Delta n}{2c}\zeta)+i\frac{\omega\Delta\kappa}{2c}\zeta\cos(\frac{\omega\Delta n}{2c}\zeta)\right\}\boldsymbol{j}\right]$$

(3.46)

ファラデー効果をΔn, $\Delta\kappa$で表す(4)

- 図３．５に示すように、座標系をz軸の回りにθ＝－($\omega\Delta n\zeta$/2c)だけ回転した座標系を$\boldsymbol{x'y'z}$で表しその単位ベクトルを$\boldsymbol{i',j',k'}$とすると、座標変換の式は

$$\begin{pmatrix} i' \\ j' \\ k' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

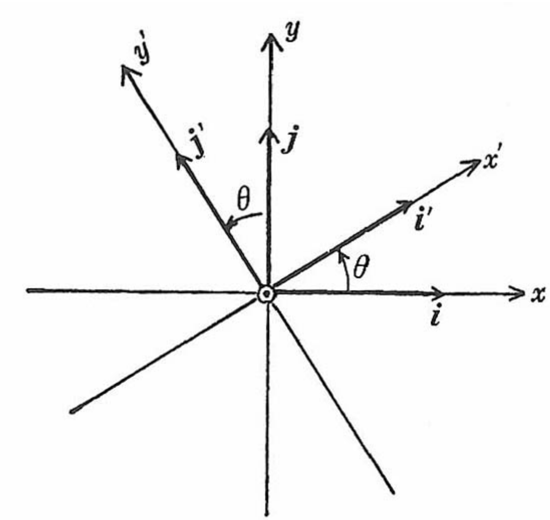


図 3.5　z 軸のまわりに θ だけ回転した座標系
z 軸は紙面に垂直上向きにとる.

で表せる。これを使って$\boldsymbol{E}_{\mathrm{out}}$は次のように書き直せます。

$$\boldsymbol{E}_{out} = E_0 \exp\left\{-i\omega\left(t - \frac{N}{c}\zeta\right)\right\}\left(\boldsymbol{i'} - i\left(\frac{\omega\Delta\kappa}{2c}\zeta\right)\boldsymbol{j'}\right) \quad (3.48)$$

ファラデー効果をΔn, $\Delta\kappa$で表す(5)

- もし，磁気円二色性がないとすると$\Delta\kappa$=0であるから、$\boldsymbol{E}_{\mathrm{out}}$は$\boldsymbol{i}$'成分のみとなり，$\boldsymbol{x}$'軸方向の直線偏光であることがわかります。入射直線偏光は$\boldsymbol{x}$軸から$\boldsymbol{x}$'軸へとθだけ回転したのである。これがファラデー回転角θ_{F}である。すなわち，ファラデー回転角は

$$\theta_F = -\frac{\omega \Delta n}{2c}\zeta \qquad (3.49)$$

Δκ≠0のときは、式(3.48)は*x*'軸を長軸、*y*'軸を短軸とする楕円偏光になります。この楕円偏光の楕円率ηFは短軸と長軸の振幅の比で与えられ

$$\eta_F = -\frac{\omega \Delta \kappa}{2c}\zeta \qquad (3.51)$$

と表されます。

ファラデー効果をε_{xx}, ε_{xy}で表す(1)

- いま、複素ファラデー回転角を $\Phi_F = \theta_F + i\eta_F$ (3.52) によって定義すると

$$\Phi_F = -\frac{\omega}{2c}(\Delta n + i\Delta\kappa)\zeta = -\frac{\omega\Delta\hat{N}}{2c}\zeta \qquad (3.53)$$

と書けます。この式に式(3.41) $\Delta\hat{N} = \dfrac{i\varepsilon_{xy}}{\sqrt{\varepsilon_{xx}}}$ を代入すると

$$\boxed{\Phi_F = -\frac{\omega}{2c}\cdot\frac{i\varepsilon_{xy}}{\sqrt{\varepsilon_{xx}}}\zeta} \qquad (3.54)$$

となり、複素ファラデー回転角は比誘電率の非対角成分ε_{xy}に比例し、対角成分ε_{xx}の平方根に反比例することがわかります。

ファラデー効果をεxx, εxyで表す(2)

- 式(3.54)を実数部と虚数部に分けて記述すると

$$
\begin{aligned}
\theta_F &= -\frac{\omega}{2c}\cdot\frac{\kappa\varepsilon'_{xy} - n\varepsilon''_{xy}}{n^2+\kappa^2}\zeta \\
\eta_F &= -\frac{\omega}{2c}\cdot\frac{n\varepsilon'_{xy} + \kappa\varepsilon''_{xy}}{n^2+\kappa^2}\zeta
\end{aligned}
\qquad (3.55)
$$

このように，ファラデー回転角と楕円率は誘電テンソルの非対角成分の実数部と虚数部の線形結合で表されることがわかりました。

ファラデー効果をεxx, εxyで表す(3)

- 通常ファラデー効果は、透明な領域で測定されるので，式(3.55)においてκ＝0と置くと，

$$\theta_F = \frac{\omega\varepsilon''_{xy}}{2cn}\zeta$$
$$\eta_F = -\frac{\omega\varepsilon'_{xy}}{2cn}\zeta \qquad (3.57)$$

となって、回転角がεxyの虚数部に、楕円率がεxyの実数部に対応することがわか りました。

磁化Mによる展開式を代入すると

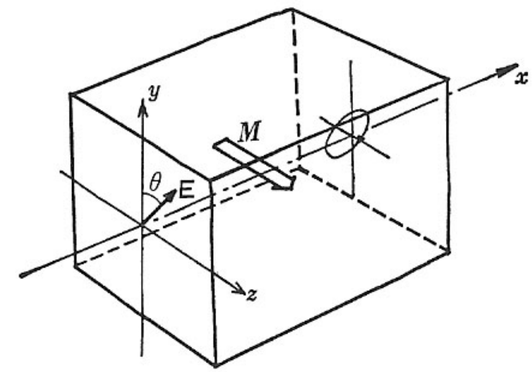
$$\Phi_F \approx -\frac{i\pi\ell}{\lambda}\cdot\frac{\varepsilon_{xy}^{(1)}M}{\sqrt{\varepsilon_{xx}^{(0)}+\frac{1}{2}\varepsilon_{xx}^{(2)}M^2}}$$

となり、磁気光学効果は$\boldsymbol{M}$の小さいときほぼ$\boldsymbol{M}$に比例します。

フォークト配置の磁気光学

- 磁化*M*に垂直な*x*軸に平行に進む波(*N//x*)に対しては、波動関数は、

$$E = E_0 \exp\{-i\omega(t - Nx/c)\} \qquad (3.29)$$



- と表されます。固有方程式は

$$\begin{pmatrix} -\varepsilon_{xx} & -\varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & N^2-\varepsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & N^2-\varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0 \qquad (3.30)$$

- となるので、永年方程式は次の式で表されます。

$$\begin{vmatrix} -\varepsilon_{xx} & -\varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & N^2-\varepsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & N^2-\varepsilon_{zz} \end{vmatrix} = 0 \qquad (3.31)$$

フォークト配置の場合の固有値

- N^2の固有値として

$$\hat{N}_1{}^2 = \varepsilon_{xx} + \frac{\varepsilon_{xy}{}^2}{\varepsilon_{xx}} \quad \text{および} \quad \hat{N}_2{}^2 = \varepsilon_{zz}$$

という2つの解を得ます。対応する固有関数は

$$\boldsymbol{E}_1 = A\exp\left\{-i\omega\left(t - \frac{\hat{N}_1}{c}x\right)\right\}\left(\varepsilon_{xy}\boldsymbol{i} - \varepsilon_{xx}\boldsymbol{j}\right)$$

(3.33)

$$\boldsymbol{E}_2 = B\exp\left\{-i\omega\left(t - \frac{\hat{N}_2}{c}x\right)\right\}\boldsymbol{k}$$

となり、磁気複屈折を生じます。

コットンムートン効果

- コットンムートン効果は光の進行方向と磁界とが垂直な場合（フォークト配置）の磁気光学効果です．
- この効果は磁化Mの偶数次の効果であって磁界の向きに依存しません．
- いま，磁化$\boldsymbol{M}$が存在すると$\boldsymbol{M}$の方向に一軸異方性が誘起され，$\boldsymbol{M}$方向に振動する直線偏光（常光線）と$\boldsymbol{M}$に垂直の方向に振動する光（異常光線）とに対して屈折率の差が生じて，複屈折を起こす現象です．
- 磁化のある場合の誘電テンソルの対角成分$\varepsilon_{xx}(\boldsymbol{M})$と$\varepsilon_{zz}(\boldsymbol{M})$が一般的には等しくないことから生じます．$\varepsilon$テンソルの対角成分はその対称性から$\boldsymbol{M}$について偶数次でなければならないので，複屈折によって生じる光学的遅延も$\boldsymbol{M}$の偶数次となります．
- コットンムートン効果は導波路型光アイソレータにおいて，モード変換部として用いられます．

3.2.3のまとめ

- 透過光に対する磁気光学効果であるファラデー効果は、誘電率テンソルの非対角成分と対角成分の両方を使って記述されることがわかりました。
- また、フォークト配置の磁気光学効果であるコットンムートン効果については対角成分が重要であることがわかりました。

3.2.4　磁気力一効果の現象論

(結果のみ）

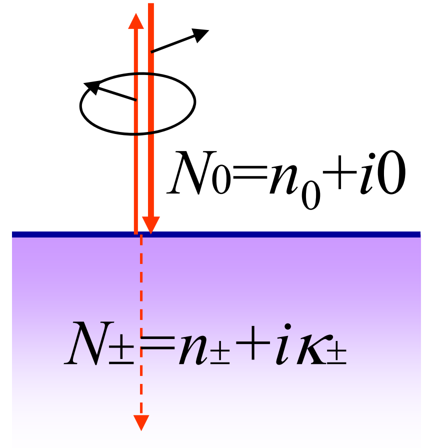
磁気カー効果

- 反射の磁気光学効果である磁気カー効果を記述するには、反射面での境界条件の下にマクスウェル方程式を解くことになり、やや面倒な手続きが必要となります。
- 詳細は、光と磁気第3章3.5・3.6をご参照下さい。

垂直入射の場合の極カー効果

- 問題を複雑にしないために，極カー効果の場合を扱い，しかも入射光は界面に垂直に入射するものとします。
- 極カー効果は直線偏光が入射したとき，反射光が楕円偏光となり，その楕円の長軸の向きが入射光の偏光方向に対して回転する現象です．
- この回転をカー回転角θ_{K}で表し，楕円の長軸と短軸の比を楕円率η_{K}で表します．
- カー回転角は右円偏光と左円偏光に対する移相量の差に対応し，楕円率は左右円偏光に対する反射率の違いから生じることを示すことができます．

Kerr効果



- 右円偏光および左円偏光に対する垂直振幅反射率は

$$\hat{r}_\pm = \frac{N_\pm - n_0}{N_\pm + n_0} \qquad (3.78)$$

によって表すことができます(ここにn_0は入射側媒体の屈折率です). 複素振幅反射率(フレネル係数)を右円偏光に対して$r_+\exp(\mathrm{i}\theta_+)$、左円偏光にして$r_-\exp(\mathrm{i}\theta_-)$とすると、カー回転角$\varphi_\mathrm{K}$は

$$\varphi_K = \frac{\theta_+ - \theta_-}{2} \equiv \frac{\Delta\theta}{2} \qquad (3.79)$$

で与えられます．また、カー楕円率η_Kは次式で与えられます。

$$\eta_K = -\frac{|r_+| - |r_-|}{|r_+| + |r_-|} \equiv -\frac{1}{2}\frac{\Delta r}{r} = -\frac{1}{4}\frac{\Delta R}{R} \qquad (3.80)$$

複素カー回転

- 磁気カー回転角φ_Kと磁気カー楕円率η_Kをひとまとめにした複素カー回転Φ_Kを考えます。

$$\Phi_K = \varphi_K + i\eta_K = \frac{\Delta\theta}{2} - i\frac{\Delta r}{2r} = -i\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta r}{r} + i\Delta\theta\right)$$

$$\hat{r} = r\mathrm{e}^{i\theta}$$

$$\Delta\hat{r} = \Delta r\mathrm{e}^{i\theta} + ir\mathrm{e}^{i\theta}\Delta\theta$$

$$\frac{\Delta\hat{r}}{\hat{r}} = \frac{\Delta r\mathrm{e}^{i\theta} + ir\mathrm{e}^{i\theta}\Delta\theta}{r\mathrm{e}^{i\theta}} = \frac{\Delta r}{r} + i\Delta\theta$$

$$\Phi_K = -i\frac{\Delta\hat{r}}{2\hat{r}} \approx i\frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{\Delta\hat{r}}{\hat{r}}\right) \approx i\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\Delta\hat{r}/2\hat{r}}{1+\Delta\hat{r}/2\hat{r}}\right) = i\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\hat{r}_-}{\hat{r}_+}\right) \quad (3.81)$$

複素カー回転を誘電率で表す(1)

- 結果を先に述べておくと、式(3.81)と式(3.77)とから，次式を得ます．

$$\Phi_K \approx \frac{n_0 \varepsilon_{xy}}{\left(n_0^2 - \varepsilon_{xx}\right)\sqrt{\varepsilon_{xx}}} \qquad (3.82)$$

•この式は、カー効果が誘電率の非対角成分ε_{xy}に依存するばかりでなく，分母に来る対角成分ε_{xx}にも大きく依存することを表している重要な式です。

•次のスライドで詳しい導き方を説明します。

式(3.82)の誘導

(3.78)

- $r_\pm$を$N_\pm$を使って表し、$N_\pm$に$\varepsilon_{xx} \pm i\varepsilon_{xy}$を代入すると、

$$\hat{r}_\pm = \frac{N_\pm - n_0}{N_\pm + n_0} = \frac{\sqrt{\varepsilon_{xx} \pm i\varepsilon_{xy}} - n_0}{\sqrt{\varepsilon_{xx} \pm i\varepsilon_{xy}} + n_0} \approx \frac{\sqrt{\varepsilon_{xx}\left(1 \pm i\varepsilon_{xy}/\varepsilon_{xx}\right)} - n_0}{\sqrt{\varepsilon_{xx}\left(1 \pm i\varepsilon_{xy}/\varepsilon_{xx}\right)} + n_0} = \frac{\sqrt{\varepsilon_{xx}}\left(1 \pm i\varepsilon_{xy}/2\varepsilon_{xx}\right) - n_0}{\sqrt{\varepsilon_{xx}}\left(1 \pm i\varepsilon_{xy}/2\varepsilon_{xx}\right) + n_0}$$

$$= \frac{\sqrt{\varepsilon_{xx}} - n_0 \pm i\varepsilon_{xy}/2\sqrt{\varepsilon_{xx}}}{\sqrt{\varepsilon_{xx}} + n_0 \pm i\varepsilon_{xy}/2\sqrt{\varepsilon_{xx}}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_{xx}} - n_0}{\sqrt{\varepsilon_{xx}} + n_0} \cdot \frac{1 \pm i\varepsilon_{xy}/2\sqrt{\varepsilon_{xx}}\left(\sqrt{\varepsilon_{xx}} - n_0\right)}{1 \pm i\varepsilon_{xy}/2\sqrt{\varepsilon_{xx}}\left(\sqrt{\varepsilon_{xx}} + n_0\right)} \approx \hat{r}\left\{1 \mp \frac{in_0\varepsilon_{xy}}{\sqrt{\varepsilon_{xx}}\left(n_0^2 - \varepsilon_{xx}\right)}\right\}$$

（ここに、$\hat{r} = \left(\sqrt{\varepsilon_{xx}} - n_0\right)/\left(\sqrt{\varepsilon_{xx}} + n_0\right)$は、偏光を考えないときのフレネル係数です）

が得られますから、式(3.81)に代入すると式(3.82)となります。

$$\Phi_K = i\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\hat{r}_-}{\hat{r}_+}\right) = i\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\hat{r}\left(1 + \dfrac{in_0\varepsilon_{xy}}{\sqrt{\varepsilon_{xx}}\left(n_0^2 - \varepsilon_{xx}\right)}\right)}{\hat{r}\left(1 - \dfrac{in_0\varepsilon_{xy}}{\sqrt{\varepsilon_{xx}}\left(n_0^2 - \varepsilon_{xx}\right)}\right)}\right) \approx i\frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{i2n_0\varepsilon_{xy}}{\sqrt{\varepsilon_{xx}}\left(n_0^2 - \varepsilon_{xx}\right)}\right) \approx \frac{n_0\varepsilon_{xy}}{\sqrt{\varepsilon_{xx}}\left(n_0^2 - \varepsilon_{xx}\right)} \quad (3.82)$$

テーラー展開による近似

- (3.82)を導くにあたって、xが小さいとき成立する次の近似式を使いました。

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2,$$
$$1/(1+x) \approx 1 - x,$$
$$(1+x)(1+y) \approx 1 + x + y$$

$$\ln(1+x) \approx x$$

(3.82)

複素カー回転を誘電率で表す(2)

- この式の対角成分εxxを光学定数n, κによって表すと,

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon'_{xx} + i\varepsilon''_{xx} = \left(n^2 - \kappa^2\right) + i2n\kappa$$

と書けますから, (3.81)に代入して整理することによって, 次のような面倒な式を得ます。

$$\theta_K = n_0 \frac{n\left(n_0^2 - n^2 + 3\kappa^2\right)\varepsilon'_{xy} + \kappa\left(n_0^2 - 3n^2 + \kappa^2\right)\varepsilon''_{xy}}{\left(n^2 + \kappa^2\right)\left\{\left(n_0^2 - n^2 - \kappa^2\right)^2 + 4\kappa^2\right\}}$$

$$\eta_K = n_0 \frac{-\kappa\left(n_0^2 - 3n^2 + \kappa^2\right)\varepsilon'_{xy} + n\left(n_0^2 - n^2 + 3\kappa^2\right)\varepsilon''_{xy}}{\left(n^2 + \kappa^2\right)\left\{\left(n_0^2 - n^2 - \kappa^2\right)^2 + 4\kappa^2\right\}} \quad (3.83)$$

カー回転角・楕円率はε’xyとε”xyの１次結合で表される。

自習課題

（今回提出する必要はありませんが中間評価の課題にします。）

- 式(3.81)から式(3.82)を導いてください。

$$\Phi_K \approx \frac{n_0 \varepsilon_{xy}}{\left(n_0^2 - \varepsilon_{xx}\right)\sqrt{\varepsilon_{xx}}} \qquad (3.82)$$

- 式(3.82)から式(3.83)を導いてください。

$$\begin{aligned} \theta_K &= n_0 \frac{n\left(n_0^2 - n^2 + 3\kappa^2\right)\varepsilon'_{xy} + \kappa\left(n_0^2 - 3n^2 + \kappa^2\right)\varepsilon''_{xy}}{\left(n^2+\kappa^2\right)\left\{\left(n_0^2 - n^2 - \kappa^2\right)^2 + 4\kappa^2\right\}} \\ \eta_K &= n_0 \frac{-\kappa\left(n_0^2 - 3n^2 + \kappa^2\right)\varepsilon'_{xy} + n\left(n_0^2 - n^2 + 3\kappa^2\right)\varepsilon''_{xy}}{\left(n^2+\kappa^2\right)\left\{\left(n_0^2 - n^2 - \kappa^2\right)^2 + 4\kappa^2\right\}} \end{aligned} \qquad (3.83)$$

複素カー回転を誘電率で表す(3)

- 真空中から光が入射する場合、$\boldsymbol{n}_0=1$として、下の式で書けます。

$$\theta_K = \frac{n\left(1-n^2+3\kappa^2\right)\varepsilon'_{xy} + \kappa\left(1-3n^2+\kappa^2\right)\varepsilon''_{xy}}{\left(n^2+\kappa^2\right)\left(\left(1-n^2-\kappa^2\right)^2+4\kappa^2\right)}$$

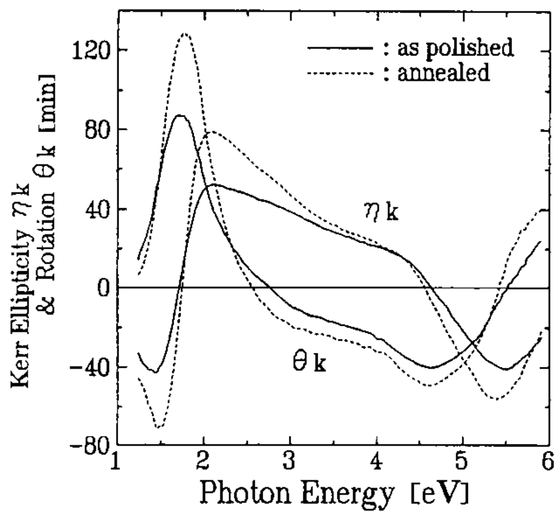
$$\eta_K = \frac{-\kappa\left(1-3n^2+\kappa^2\right)\varepsilon'_{xy} + n\left(1-n^2+3\kappa^2\right)\varepsilon''_{xy}}{\left(n^2+\kappa^2\right)\left(\left(1-n^2-\kappa^2\right)^2+4\kappa^2\right)} \qquad (3.83')$$

プラズマ・エンハンス

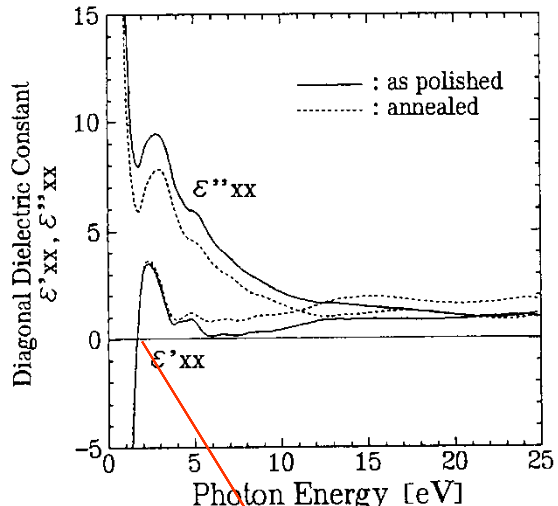
$$\Phi_K \approx \frac{\varepsilon_{xy}}{(1-\varepsilon_{xx})\sqrt{\varepsilon_{xx}}}$$

- いままで述べたように、複素カー回転角は誘電率の非対角成分だけでなく、対角成分にも関係します。
- プラズマ振動数においてエンハンス(増大)が起きます。
- 例：PtMnSb単結晶のカー回転スペクトルのピーク

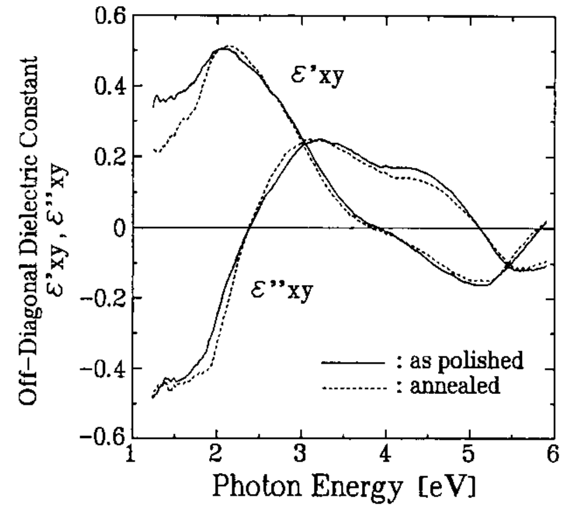
カー回転θ_Kと楕円率η_K



誘電率対角成分



誘電率非対角成分



出典：K.Sato et al: Proc. ICF6 (1992) p.1647

プラズマ振動数:誘電率の実数部がゼロを横切る

斜め入射の極カー効果の式

- 入射角φ_0で斜め入射した直線偏光の極カー複素回転角Φは、

$$\tan\Phi_K = \frac{r_{sp}}{r_{pp}} = \frac{\varepsilon_{xy}\cos\varphi_0}{\sqrt{\varepsilon_{xx}}\left(\cos\varphi_0 + \sqrt{\varepsilon_{xx}}\cos\varphi_2\right)\left(\cos\varphi_2 - \sqrt{\varepsilon_{xx}}\cos\varphi_0\right)} \quad (3.88)$$

であらわすことができます。ここにφ_2は媒体内への屈折角です。

φ_0とφ_2との間にはスネルの法則が成立します．すなわち，

$$\frac{\sin\varphi_0}{\sin\varphi_2} = \frac{\sqrt{\varepsilon_{xx}}}{n_0}$$

縦カー効果の式

- 入射角φ_0で入射した直線偏光の受ける複素カー効果は、次式で表されます。

$$\tan\Phi_K = \frac{\varepsilon_{xy}\cos\varphi_0\sin\varphi_2}{\varepsilon_{xx}\left(\sqrt{\varepsilon_{xx}}\cos\varphi_0 - \cos\varphi_2\right)\left(\sqrt{\varepsilon_{xx}}\cos\varphi_2 + \cos\varphi_0\right)} \qquad (3.91)$$

φ_0とφ_2との間にはスネルの法則が成立します．すなわち，

$$\frac{\sin\varphi_0}{\sin\varphi_2} = \frac{\sqrt{\varepsilon_{xx}}}{n_0}$$

3.2.4のまとめ

- 反射の磁気光学効果である磁気カー効果が誘電率テンソルの対角・非対角成分で表されることを学びました。

3.2のまとめ

- 光の伝搬をマクスウェルの方程式で記述すると，磁化された等方性物質の屈折率Nはで$N2=\varepsilon_{xx}\pm i\varepsilon_{xy}$で与えられる２つの固有値をとり，それぞれが右円偏光および左円偏光に対応します．（ここに，εxxは誘電率テンソルの対角成分，εxyは非対角成分です．）もし，ε_{xy}が0であれば，円偏光は固有関数ではなく，磁気光学効果は生じません。
- 長さζの磁性体におけるファラデー回転角θFおよびファラデー楕円率ηFは，左右円偏光に対する屈折率の差Δnおよび消光係数の差Δκを用いて 表すことができます。
- さらに、ファラデー回転角と楕円率は誘電率テンソルの非対角成分の実数部と虚数部の線形結合で表されることがわかりました。
- また、磁化が光の進行方向に対して垂直なフォークト配置ではコットンムートン効果という磁気複屈折現象が生じることを学びました。
- 反射の磁気光学効果である磁気カー効果も誘電率テンソルの非対角成分を分子とし、対角成分を用いた$\varepsilon_{xx}^{1/2}$ $(1-\varepsilon_{xx})$を分母とする分数で表されます。