大学院工学研究科

磁性工学特論第9回

ー光と磁気(3)ー

佐藤勝昭
農工大副学長

復習コーナー
第8回に学んだこと

- 光と磁気の現象論(1)
  - 円偏光と磁気光学効果
  - 光と物質の結びつき
    - 誘電率テンソル

第9回に学ぶこと

- 光の伝搬とマクスウェルの方程式
  - 固有解:波動解、固有値:複素屈折率
- ファラデー配置の場合の固有値と固有状態
  - 2つの固有値と対応する固有状態(円偏光)
- フォークト配置の場合の固有値と固有状態
  - 磁気誘起の複屈折
- ファラデー効果の現象論
  - ファラデー効果と誘電率テンソル

マクスウェルの方程式

- 光の電界ベクトルをE 、電束密度ベクトルを*D* 、磁界ベクトルを*H*、磁束密度ベクトルを*B*、電流を*J*とすると、次の関係が成立する。

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{J} \qquad (3.17)$$

（SI単位系）

マクスウェル方程式をEとHで表す

- 簡単のため，$\boldsymbol{J}$=0と置く。[伝導電流を分極電流（変位電流）の中に繰り込む]
- BとH、DとEの関係式

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}$$

$$\boldsymbol{D} = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \varepsilon_0 \boldsymbol{E}$$

を代入して、式(3.17)は次のように書き変えられる。

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{3.18}$$

誘電率テンソル

Maxwell方程式の解法

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\,\varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

- 左の式からHを消去する。第1式の両辺のrotを計算する。

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\mathrm{rot}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}$$

$$= -\varepsilon_0 \mu_0 \tilde{\varepsilon} \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = -\frac{\tilde{\varepsilon}}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

- rot rotに関する公式を使って書き直す。

$$\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\ \boldsymbol{E} = \mathrm{grad}\ \mathrm{div}\ \boldsymbol{E} - \nabla^2 \boldsymbol{E}$$

電荷のない系ではdivE=0なので

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \frac{\tilde{\varepsilon}}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \exp(-i\omega t)\cdot\exp(i\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r})$$
$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 \exp(-i\omega t)\cdot\exp(i\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r})$$

を代入する。

$$(K^2 - \frac{\omega^2\tilde{\varepsilon}}{c^2})\boldsymbol{E} = 0$$

が得られる。

平面波の解を仮定する

- 波数ベクトルKとして
- $$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \exp(-i\omega t)\cdot\exp(i\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r})$$ $$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 \exp(-i\omega t)\cdot\exp(i\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r})$$ (3.19)
- ここにE_0, H_0は時間や距離に依存しない定数ベクトルである。この式を式(3.18)に代入すると、
- $$\boldsymbol{K}\times\boldsymbol{E} = \omega\mu_0\boldsymbol{H}$$ $$\boldsymbol{K}\times\boldsymbol{H} = -\omega\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\boldsymbol{\varepsilon_0}\boldsymbol{E}$$
- となる。

固有方程式

- 両式から*H*を消去し、固有方程式として

$$(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{K})\boldsymbol{K}-\left|K\right|^2\boldsymbol{E}+(\omega/c)^2\tilde{\varepsilon}\boldsymbol{E}=0$$

が得られる。問題3.1参照

$$\boldsymbol{K}\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{K}\times\frac{1}{\omega\mu_0}(\boldsymbol{K}\times\boldsymbol{E})=\frac{1}{\omega\mu_0}\boldsymbol{K}\times\boldsymbol{K}\times\boldsymbol{E}=-\omega\tilde{\varepsilon}\varepsilon_0\boldsymbol{E}$$

問題3．１　式(3.19)を式(3.18)に代入して式(3.20)を導け。ただし、ベクトル積の公式 $A\times(B\times C)=(C\cdot A)B-(B\cdot A)C$ を利用せよ。

- $$\boldsymbol{K}\times\boldsymbol{E}=\omega\mu_0\boldsymbol{H}$$ $$\boldsymbol{K}\times\boldsymbol{H}=-\omega\tilde{\varepsilon}\varepsilon_0\boldsymbol{E}$$ からHを消去することにより
- $$\boldsymbol{K}\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{K}\times\frac{1}{\omega\mu_0}(\boldsymbol{K}\times\boldsymbol{E})=\frac{1}{\omega\mu_0}\boldsymbol{K}\times\boldsymbol{K}\times\boldsymbol{E}=-\omega\tilde{\varepsilon}\varepsilon_0\boldsymbol{E}$$ を得る
- ここで上の公式を利用して

$$\boldsymbol{K}\times\boldsymbol{K}\times\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{K})\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{K})\boldsymbol{E}$$ が導かれるので

$$(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{K})\boldsymbol{K}-|K|^2\boldsymbol{E}+(\omega/c)^2\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\boldsymbol{E}=0$$

が導かれた

$$(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{K})\boldsymbol{K}-|\boldsymbol{K}|^2\boldsymbol{E}+(\omega/c)^2\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\boldsymbol{E}=0$$

を解く

- この式を解いてKの固有値と対応する電界ベクトルEの固有関数を求めよう。ここで複素屈折率N、すなわち、$N=n+i\kappa$を導入する。ここにnは屈折率、κは消光係数である。媒質中において波数Kは
- $K=\omega N/c=\omega n/c+i\omega\kappa/c$で表される[1]。

[1]波数Kは$2\pi/\lambda'$となる。ここにλ'は媒質中での波長で、媒質中での光速をc'とすると　　　と表される。媒質中での光速c'は屈折率をnとするとc/nで与えられるから、$K=\omega n/c$である。ここで屈折率を拡張して複素屈折率N、すなわち$n+i\kappa$を導入すると、$K=\omega N/\boldsymbol{c}=\omega n/\boldsymbol{c}+\boldsymbol{i}\omega\kappa/\boldsymbol{c}$ となる。

- 波数ベクトルの向きに平行で長さが*N*であるような屈折率ベクトル***N***を用いると、(3.19)の第1式は

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \exp\{-i\omega(t - \boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{r}/c)\} \qquad （3．21）$$

- となり、固有方程式(3.20)は

$$N^2\boldsymbol{E} - (\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{N})\boldsymbol{N} - \tilde{\varepsilon}\boldsymbol{E} = 0 \qquad （3．22）$$

- によって記述できる。以下では、2.3に述べた2つの配置(ファラデー配置とフォークト配置)について固有値を求める。

ファラデー配置の場合(θ=0)

- 磁化がz軸方向にあるとして、z軸に平行に進む波(***N*** *//z*)に対して式(3.21)は

$$E = E_0 \exp\{-i\omega(t - Nz/c)\}$$

- と表される。固有方程式(3.22)は

$$\begin{pmatrix} N^2 - \varepsilon_{xx} & -\varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & N^2 - \varepsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0$$

- と書ける。この方程式が*E*≠0の解をもつためには、上式において*E*の係数の行列式が0でなければならない。こうして次の永年方程式を得る。(問題3.2参照)

永年方程式

- $$\begin{vmatrix} N^2-\varepsilon_{xx} & -\varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & N^2-\varepsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_{zz} \end{vmatrix} = 0$$ （3．25）
- これより、N^2の固有値として2個の値

$$N_{\pm}^2 = \varepsilon_{xx} \pm i\varepsilon_{xy}$$ （3．26）

- を得る。　これらの固有値に対応する固有関数は、

$$E_{\pm} = \frac{E_0}{2}(i \pm \mathrm{i}j)\exp\{-\mathrm{i}\omega(t - \frac{N_{\pm}}{c}z)$$ （3．27）

- *E*+、*E*-は、それぞれ、右円偏光、左円偏光に対応する。

固有関数は円偏光

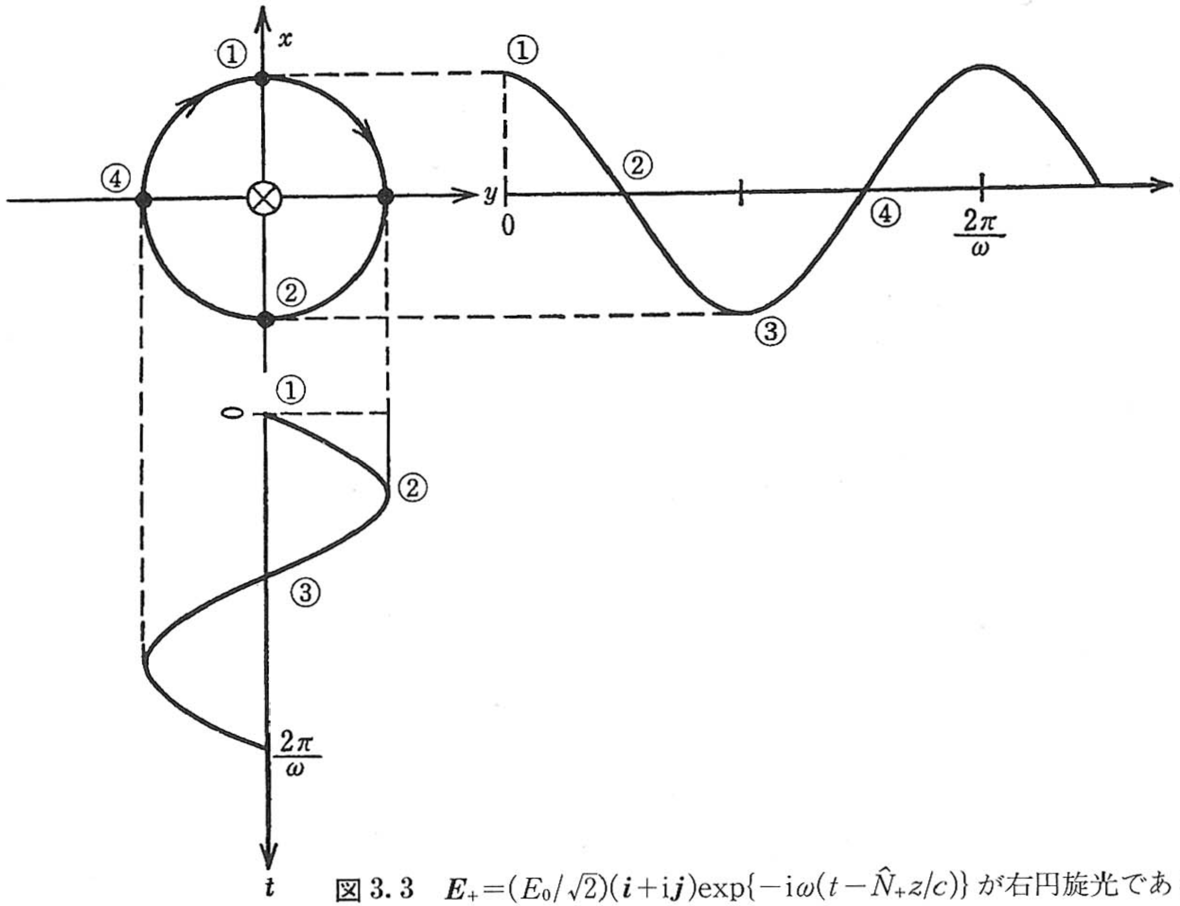

図 3.3　$\boldsymbol{E}_+ = (E_0/\sqrt{2})(\boldsymbol{i} + \mathrm{i}\boldsymbol{j})\exp\{-\mathrm{i}\omega(t - \hat{N}_+ z/c)\}$ が右円旋光であること

フォークト配置の場合

- N^2の固有値として
- $$N_1{}^2 = \varepsilon_{xx} + \frac{\varepsilon_{xy}{}^2}{\varepsilon_{xx}}$$ および $$N_2{}^2 = \varepsilon_{zz}$$
- という2つの解を得る。N_1およびN_2に対応する固有関数は
- $$E_1 = A\exp\left\{-i\omega\left(t - \frac{N_1}{c}x\right)\right\}\left(\varepsilon_{xy}\boldsymbol{i} - \varepsilon_{xx}\boldsymbol{j}\right)$$ $$E_2 = B\exp\left\{-i\omega\left(t - \frac{N_2}{c}x\right)\right\}\boldsymbol{k} \qquad (3.33)$$
- となり、複屈折を生じる。(コットンムートン効果)

左右円偏光に対する光学定数の差と誘電率テンソルの成分の関係

- 磁化と平行に進む光の複素屈折率の固有値は式(3.26)　$N_{\pm}^{2} = \varepsilon_{xx} \pm i\varepsilon_{xy}$
- $N_{+} = n_{+} + i\kappa_{+}$,　$N_{-} = n_{-} + i\kappa_{-}$
- 置き換え $\Delta n = n_{+} - n_{-}; \Delta\kappa = \kappa_{+} - \kappa_{-};\ n = \dfrac{n_{+} + n_{-}}{2}; \kappa = \dfrac{\kappa_{+} + \kappa_{-}}{2}$

$$\boldsymbol{N}_{\pm} = \boldsymbol{n} \pm \frac{\Delta\boldsymbol{n}}{2} + \boldsymbol{i}\left(\kappa \pm \frac{\Delta\kappa}{2}\right) = (\boldsymbol{n} + \boldsymbol{i}\kappa) \pm \frac{1}{2}(\Delta\boldsymbol{n} + \boldsymbol{i}\Delta\kappa) \equiv \boldsymbol{N} \pm \frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{N}$$

- ここに $\Delta N = N_{+} - N_{-} = \Delta n + i\Delta\kappa$
- その結果 $\varepsilon'_{xx} = n^{2} - \kappa^{2};\ \ \varepsilon''_{xx} = 2n\kappa$　$\varepsilon'_{xy} = n\Delta\kappa + \kappa\Delta n \quad \varepsilon''_{xy} = \kappa\Delta\kappa - n\Delta n$ を得る

複素ファラデー回転角

- ΔnとΔ κをε xyを使って表す。

$$\Delta n = \frac{\kappa \varepsilon'_{xy} - n\varepsilon''_{xy}}{n^2+\kappa^2};\ \ \Delta\kappa = \frac{n\varepsilon'_{xy} + \kappa\varepsilon''_{xy}}{n^2+\kappa^2}$$

- ΔNに書き直すと

$$\Delta N = \Delta n + i\Delta\kappa = \frac{i(n-i\kappa)(\varepsilon'_{xy}+i\varepsilon''_{xy})}{n^2+\kappa^2} = \frac{i\varepsilon_{xy}}{\sqrt{\varepsilon_{xx}}}$$

- 複素ファラデー回転角
- $$\Phi_F = -\frac{\omega}{2c}\left(\Delta n + i\Delta\kappa\right)\zeta = -\frac{\omega\Delta N}{2c}\zeta \rightarrow \Phi_F = -\frac{\omega}{2c}\cdot\frac{i\varepsilon_{xy}}{\sqrt{\varepsilon_{xx}}}\zeta$$

磁気光学の式(続き)

$$\Delta\hat{N} = \hat{N}_{+} - \hat{N}_{-} = \sqrt{\varepsilon_{xx} + i\varepsilon_{xy}} - \sqrt{\varepsilon_{xx} - i\varepsilon_{xy}} \approx i\frac{\varepsilon_{xy}}{\sqrt{\varepsilon_{xx}}}$$

$$\Phi_{F} = -\frac{\pi\Delta\hat{N}\ell}{\lambda} = -\frac{i\pi\ell}{\lambda}\cdot\frac{\varepsilon_{xy}}{\sqrt{\varepsilon_{xx}}}$$

$$\approx -\frac{i\pi\ell}{\lambda}\cdot\frac{\varepsilon_{xy}^{(1)}M}{\sqrt{\varepsilon_{xx}^{(0)} + \frac{1}{2}\varepsilon_{xx}^{(2)}M^{2}}}$$

磁気光学効果には対角・非対角両成分が寄与