

第3章 光と磁気現象論

第3章の内容

前章では、磁気光学効果がどのような現象であるのかについて概略を述べた。第3章ではこの効果が物質のどのような性質に基づいて生じるかを述べる。この章では物質のミクロな性質には目をつぶって、物質を連続体のように扱い、偏光が伝わる様子を電磁波の基本方程式であるマクスウェルの方程式によって記述する。物質の応答は誘電率によって表す。この章ではこのようなマクロな立場に立って磁気光学効果がどのように説明できるかについて述べる。この章では、第2章とは違ってやや煩雑な式を使うことになるが、しばらくの間我慢してほしい。ほとんどの式は読者が自ら誘導できるように、問題などの形で補ったつもりである。忙しい読者は各節の終わりのまとめだけを読んでいただければよい。誘電率はミクロな電子構造によって記述されるのであるが、これについては第4章で述べる。

3.1 円偏光と磁気光学効果

ここでは旋光性や円二色性が左右円偏光に対する物質の応答の差に基づいて生じることを説明する。

図 3.1 を見てもらいたい。この図で光は紙面に垂直に裏側に向かっているものとする。2章の約束に従って、時計回りの電界ベクトルを右円偏光、反時計回りの電界ベクトルを左円偏光と定義する。

直線偏光の電界ベクトルの軌跡は (a) のように、振幅と回転速度が等しい右円偏光と左円偏光との合成で表される。(a) の直線偏光が物質を透過したとき、もし透過後の光の左円偏光が (b) のように右円偏光よりも位相が進んでいたとするとこれらを合成した電界ベクトルの軌跡は、もとの直線偏光から傾いたものになる。この傾きの角が旋光角と呼ばれ、右円偏光と左円偏光の位相差の半分に等しい。一方、(c) のように右円偏光と左円偏光のベクトルの振幅に差が生じたとき、それらの合成ベクトルの軌跡は楕円になる。このような性質を円 (偏光) 二色性 (Circular Dichroism : CD) と呼ぶ。楕円偏光の楕円率は楕円の短軸と長軸の長さの比の逆正接 ($\arctangent : \tan^{-1}$) であるが、この比が小さいときは長さの比としてもさしつかえない。以上は左右円偏光の位相と振幅の違いを別々に考えたのであるが、現実には両方が同時に生じるので、合成ベクトルは (d) のように主軸の傾いた楕円偏光になっている。

このように、旋光性や円二色性は右円偏光と左円偏光に対する物質の応答の違いがあるために生じるということがおわかりいただけたと思う。左右円偏光に対する物質の応答の違いはマクロには誘電テンソルまたは伝導率テンソルの非対角成分から生じることが、マクスウェル方程式を用いて説明できる。このことは 3.3 節 (p.***) で詳しく論じる。

なお、上述の話は磁気光学効果の場合だけでなく、光学活性一般で成り立つ話であると理解されたい。

3.1 節のまとめ

直線偏光：右円偏光と左円偏光に分解できる

旋光性：物質中で右円偏光と左円偏光の位相に差が生じたとき起きる

円二色性：右円偏光と左円偏光に対する物質の吸収に差が生じたとき起きる

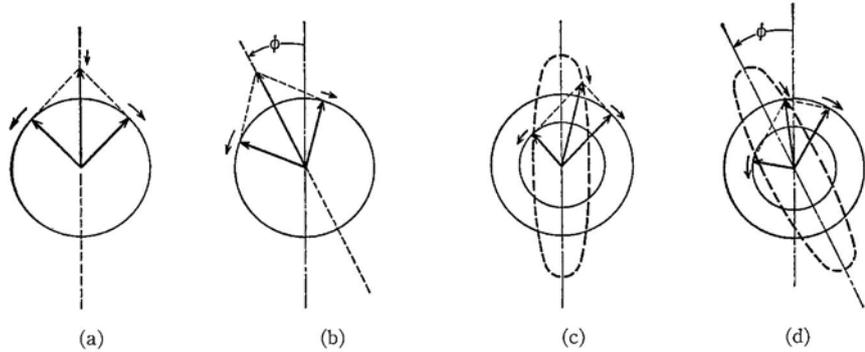


図 3.1 旋光性と円二色性の起源

- (a) 直線偏光の電界ベクトルは右まわりと左まわりの2つの円偏光ベクトルに分解できる。
- (b) 物質を透過したとき右まわり成分が左まわり成分よりも位相が進んでいたとすると、合成したベクトルの軌跡は入射偏光から傾いた直線偏光となる。
- (c) 物質を透過したとき右まわり成分と左まわり成分の振幅の違いが生じると、合成したベクトルは楕円偏光となる。
- (d) 物質を透過したとき右まわり成分と左まわり成分の振幅と位相の両方に違いがあると、主軸の傾いた楕円偏光となる。

3.2 光と物質のむすびつき¹⁾—誘電率と伝導率—

やや先走るようであるが、3.5 節の具体例(図 3.6, p.***)をご覧ください。これはピスマス添加 YIG(イットリウム鉄ガーネット)の磁気光学効果に関する論文からとったものであるが、測定された反射スペクトル、ファラデー回転スペクトルなどではなく誘電テンソルの対角、非対角成分のスペクトルが示されているのに注意して欲しい。

なぜ誘電テンソルを用いるのであろうか。1 つは、反射率やカー回転は入射角や磁化の向きに依存する量で、物質固有のレスポンスを表す量ではないが、誘電テンソルは物質に固有の量であるからである。2 番目には物質中の電子構造とか光学遷移のマトリックスとかに直接結びつけることができるのが誘電テンソルだからである。

連続媒体中の光の伝わり方はマクスウェルの方程式で記述される。マクスウェルの方程式については 3.3 節に詳述するが、ここでは電磁波の電界と磁界との間の関係を与える 2 階の微分方程式であると理解しておいて欲しい。このとき媒体の応答を与えるのが、誘電率 ϵ または伝導率 σ である。磁性体中の伝搬であるから透磁率が効いてくるのではないかと考える人があるかも知れない。しかし、光の振動数くらいの高周波になると巨視的な磁化はほとんど磁界に追従できなくなるため、透磁率を $\mu \cdot \mu_0$ としたときの比透磁率 μ は 1 として扱ってよい。およその見当としては、強磁性共鳴の振動数以上の

振動数に対しては $\mu=1$ となる。 $(\mu_0$ は真空の透磁率でありSI単位系特有のものである。ここに、 $\mu_0=1.257\times 10^{-6}$ H/m)*

誘電率は電束密度 D と電界 E の関係を与える量である。SI単位系を用いているので誘電率は $\epsilon\epsilon_0$ (ϵ_0 は真空の誘電率であり、 $\epsilon_0=8.854\times 10^{-12}$ F/m である)で与えられる。ここに ϵ は比誘電率と呼ばれる量でCGS系の誘電率に等しい。以下では、この比誘電率を用いて議論を進める。

D と E との間には、

$$D = \tilde{\epsilon}\epsilon_0 E$$

なる関係が成り立つ。 D も E もベクトルなのでベクトルとベクトルの関係を与える量である $\tilde{\epsilon}$ は2階のテンソル量である。2階のテンソルというのは、2つの添字をつかって表される量で、 3×3 の行列と考えてさしつかえない。(テンソルを表すため記号 \sim (チルダ)をつける)

同様に伝導率 σ も電流密度 J と電界 E の関係を与える量なのでテンソルで表される。

$$J = \tilde{\sigma}E$$

このように比誘電率 $\tilde{\epsilon}$ も伝導率 $\tilde{\sigma}$ も9個のテンソル成分で記述できる。光の話をしているのになぜ電流が出てくるのか疑問に思われるかもしれない。マクスウェルの式によると物質中の電流には伝導電流のほかに変位電流という電束密度の時間微分 $\partial D/\partial t$ にもとづいて流れる電流を考慮すべきであることがわかる。上述の J はこの変位電流をも含んだ一般的な電流なのである。

比誘電率テンソル $\tilde{\epsilon}$ は次式で表される。

$$\tilde{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

$\tilde{\epsilon}$ の成分は一般に複素数なので

$$\epsilon_{ij} = \epsilon'_{ij} + i\epsilon''_{ij} \quad (3.4)$$

のように表すことにする。一方、伝導率テンソル $\tilde{\sigma}$ は

$$\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

で与えられる。 $\tilde{\sigma}$ の成分も一般に複素数であるから

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + i\sigma''_{ij} \quad (3.6)$$

で表す。文献では σ の単位としてCGS系の $[s^{-1}]$ が用いられることが多いが、SI系では単位は $[S/m]$ である。CGS系の σ とSI系の σ の間には $[\sigma]_{SI}=[\sigma]_{CGS}\times 9^{-1}\times 10^9$ なる関係が成立する。ただし、光速 $c=3\times 10^8$ [m/s]とした。

次節(p.***)で述べるように $\tilde{\epsilon}$ の成分 ϵ_{ij} と $\tilde{\sigma}$ の成分 σ_{ij} の間には次の関係が成り立つ。

$$\epsilon_{ij} = \delta_{ij} + i\frac{\sigma_{ij}}{\omega\epsilon_0} \quad [SI] \quad (3.7)$$

ここに δ_{ij} は、クロネッカーのデルタと呼ばれるもので、 $i=j$ であれば1、 $i\neq j$ ならば0を表す。 ω の単位は $[rad/s]$ を用いる。文献で σ_{ij} がCGSで与えられているときは、

$$\epsilon_{ij} = \delta_{ij} + i\frac{4\pi\sigma_{ij}}{\omega} \quad [CGS] \quad (3.8)$$

によって、 $\tilde{\epsilon}$ に換算できる。以下では $\tilde{\epsilon}$ と $\tilde{\sigma}$ とを併記することはしないで、 $\tilde{\epsilon}$ の方だけを示しておく。 $\tilde{\sigma}$ になおすには式(3.7)あるいは(3.8)を用いればよい。

比誘電率 $\tilde{\epsilon}$ と伝導率 $\tilde{\sigma}$ のいずれを用いて記述してもよいのであるが、一般には金属を扱うときは $\tilde{\sigma}$ の方を、絶縁体であれば $\tilde{\epsilon}$ の方を用いるのが普通である。第4章の図4.2に示すように、金属の場合 $\omega\rightarrow 0$ の極限すなわち直流において ϵ_{xx} は自由電子の遮蔽効果のために発散してしまうが、 σ_{xx} は有限の値に収束するので都合がよいからである[†]。

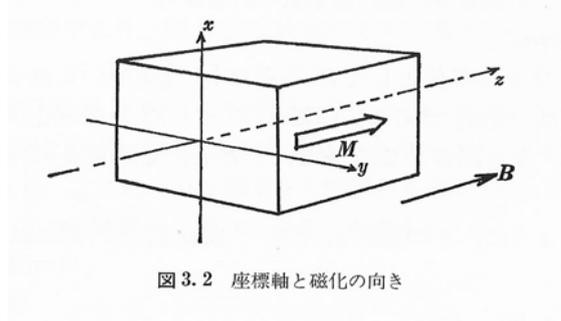


図 3.2 座標軸と磁化の向き

* 通常比透磁率は μ_r 、比誘電率は ϵ_r と書かれるが、本書では、CGS単位系の透磁率と誘電率との整合性を考え、それぞれ、 μ 、 ϵ と書く。

[†] 4.1で示すように、金属においてはドルーデの式が成り立つ。

この式は誘電率で表すと $\epsilon_{xx} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\gamma)}$ となるので $\omega\rightarrow 0$ に対し $\epsilon\rightarrow\infty$ と発散するが、伝導率で表すと

方、絶縁体では $\omega \rightarrow 0$ で σ は0に近づくが ε は有限値に収束するので扱いやすい。

以下では簡単のため等方性の物質を考える。このとき、 $\tilde{\varepsilon}$ は磁化がなければ次のように書き表すことができる。

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{xx} \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

もし、図 3.2 に示すように磁化 M の方向に z 軸をとると z 軸が異方軸となる一軸異方性が生じる。 $\tilde{\varepsilon}$ は z 軸の周りの任意の回転に対して不変であるから、例えば、 90° の回転 C_4 を施して

$$C_4^{-1} \tilde{\varepsilon} C_4 = \tilde{\varepsilon} \quad (3.10)^\ddagger$$

という関係が成り立ち、

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{yx} &= -\varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} &= \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{zy} = 0 \end{aligned} \quad (3.11)^\S$$

が導かれる。 $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{zz}$ である必要はない。

従って、磁化のあるときの等方性物質の ε テンソルは簡単に次のように書ける。

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ -\varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

すなわち、 ε を表すには3つのパラメータでよいということになる。マクスウェルの方程式（次節）のところで説明するが、ふつうの屈折や反射などに効くのは、対角成分 ε_{xx} （または σ_{xx} ）であり、一方光学活性に効くのは非対角成分 ε_{xy} （あるいは σ_{xy} ）であることが導かれる。磁気光学効果の原因となる右円偏光と左円偏光に対する媒体の応答の差をもたらすのは、これら非対角成分である。

さて、磁気光学効果において $\tilde{\varepsilon}$ の各成分は M の関数であるから、 $\tilde{\varepsilon}$ は次式のように表せるはずである。

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}(M) & \varepsilon_{xy}(M) & 0 \\ -\varepsilon_{xy}(M) & \varepsilon_{xx}(M) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz}(M) \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

$\sigma_{xx} = \frac{i\varepsilon_0\omega_p^2}{\omega + i\gamma}$ となり、 $\omega \rightarrow 0$ に対し $\sigma \rightarrow \frac{\varepsilon_0\omega_p^2}{\gamma}$ となって有限の値をもつ。

‡一般に座標軸の回転を R という行列で表す。 ε は電界 E を基底として表されているが、この電界 E に回転 R を施すと E になるとする。これを $E = RE$ と書く。 ε が R に対して不変ということは、電束 $D = \varepsilon E$ に回転 R を施したものの $R(\varepsilon E)$ が新しい基底 E' に対して同じ ε を使って表されることを意味する。すなわち $R(\varepsilon E) = \varepsilon E'$ 。従って、 $\varepsilon E' = R^{-1}(\varepsilon E) = R^{-1}\varepsilon RE$ 。これより $R^{-1}\varepsilon R = \varepsilon$ となる。

§ C_4 というのは z 軸の周りの 90° の回転であるから、

$$E_x' = C_4 E_x = E_y, \quad E_y' = C_4 E_y = -E_x$$

のように変換する。 C_4 を行列で表すと、

$$C_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{であるから、} C_4^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3.10)式に代入して、

$$C_4^{-1} \tilde{\varepsilon} C_4 = \begin{pmatrix} \varepsilon_{yy} & -\varepsilon_{yx} & -\varepsilon_{yz} \\ -\varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xz} \\ -\varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \equiv \tilde{\varepsilon}$$

両辺の各成分を比較することにより、(3.11)式が得られる。

$\varepsilon_{ij}(\mathbf{M})$ を次式のように \mathbf{M} でべき級数展開する。

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{M}) = \varepsilon_{ij}^{(0)} + \sum_n \frac{1}{n!} \varepsilon_{ij}^{(n)} M^n \quad (3.14)$$

ここで、Onsager によって導かれた関係式

$$\varepsilon_{ij}(-\mathbf{M}) = \varepsilon_{ji}(\mathbf{M}) \quad (3.15)$$

を考慮すると、対角成分は \mathbf{M} の偶数次のみ、非対角成分は \mathbf{M} の奇数次のみで展開できることが導かれる**。すなわち、

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}(\mathbf{M}) &= \varepsilon_{xx}^{(0)} + \sum_n \varepsilon_{xx}^{(2n)} M^{2n} / (2n)! \\ \varepsilon_{xy}(\mathbf{M}) &= \sum_n \varepsilon_{xy}^{(2n+1)} M^{2n+1} / (2n+1)! \\ \varepsilon_{zz}(\mathbf{M}) &= \varepsilon_{zz}^{(0)} + \sum_n \varepsilon_{zz}^{(2n)} M^{2n} / (2n)! \end{aligned} \quad (3.16)$$

ここに $\varepsilon_{ij}^{(n)}$ は \mathbf{M} に独立な n 次の展開係数である。

3.3 節に述べるように $\varepsilon_{xy}(\mathbf{M})$ がファラデー効果やカー効果をもたらし、 $\varepsilon_{xx}(\mathbf{M})$ と $\varepsilon_{zz}(\mathbf{M})$ の差が磁気複屈折（コットン・ムートン効果）の原因となる。

3. 3 光の伝搬とマクスウェルの方程式²⁾

3.3.1 マクスウェル方程式と固有値問題

この節は、前節で述べたような誘電テンソル $\tilde{\varepsilon}(\mathbf{M})$ をもった媒質中を光が伝搬するときどのような波として伝わるのかを調べるのが目的である。光は電磁波であるから、その伝搬はマクスウェルの方程式で記述できる。ややめんどろな式が続くが辛抱して欲しい。（ベクトル解析になじみのない読者は結果のみを知っていただければ十分である。）

光の電界ベクトルを \mathbf{E} 、電束密度ベクトルを \mathbf{D} 、磁界ベクトルを \mathbf{H} 、磁束密度ベクトルを \mathbf{B} 、電流を \mathbf{J} とすると

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \text{rot } \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \end{aligned} \quad (3.17)$$

ここに単位系は S I 系を用いている。

いま簡単のため、伝導電流も分極電流（変位電流）の中に繰り込むことにより、 $\mathbf{J}=0$ と置く。前節で述べたように

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{H} \\ \mathbf{D} &= \tilde{\varepsilon} \varepsilon_0 \mathbf{E} \end{aligned}$$

なる関係が成り立つので式(3.17)は次のように書き変えられる。

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E} &= -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \text{rot } \mathbf{H} &= \tilde{\varepsilon} \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.18)$$

式(3.18)の解として、波数ベクトルを \mathbf{K} として、次式の平面波を考える。

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t) \cdot \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}) \\ \mathbf{H} &= \mathbf{H}_0 \exp(-i\omega t) \cdot \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}) \end{aligned} \quad (3.19)$$

ここに \mathbf{E}_0 、 \mathbf{H}_0 は時間や距離に依存しない定数ベクトルである。この式を式(3.18)に代入すると、

$$\begin{aligned} \mathbf{K} \times \mathbf{E} &= \omega \mu_0 \mathbf{H} \\ \mathbf{K} \times \mathbf{H} &= -\omega \tilde{\varepsilon} \varepsilon_0 \mathbf{E} \end{aligned}$$

となる。

両式から \mathbf{H} を消去し、固有方程式として

$$(\mathbf{E} \cdot \mathbf{K}) \mathbf{K} - |\mathbf{K}|^2 \mathbf{E} + (\omega/c)^2 \tilde{\varepsilon} \mathbf{E} = 0 \quad (3.20)$$

** (3.15)式より、対角成分については

$$\varepsilon_{xx}(-M) = \varepsilon_{xx}(M) \quad \text{および} \quad \varepsilon_{zz}(-M) = \varepsilon_{zz}(M)$$

が成立することから、 ε_{xx} 、 ε_{zz} は M について偶関数であることが分る。また非対角成分については、

$$\varepsilon_{xy}(-M) = \varepsilon_{yx}(M) = -\varepsilon_{xy}(M)$$

が成り立つことから ε_{xy} は M について奇関数であることがわかる。

が得られる。(問題3.1参照)この式を導くに当たって $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ を用いた。

この式を解いて \mathbf{K} の固有値と対応する電界ベクトル \mathbf{E} の固有関数を求めよう。ここで複素屈折率 N 、すなわち、 $N = n + i\kappa$ を導入する。ここに n は屈折率、 κ は消光係数である。媒質中において波数 K は $K = \omega N/c = \omega n/c + i\omega\kappa/c$ で表される^{††}。波数ベクトルの向きに平行で長さが N であるような屈折率ベクトル \mathbf{N} を用いると、(3.19)の第1式は

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp\{-i\omega(t - \mathbf{N} \cdot \mathbf{r}/c)\} \quad (3.21)$$

となり、固有方程式(3.20)は

$$N^2 \mathbf{E} - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{N})\mathbf{N} - \tilde{\epsilon} \mathbf{E} = 0 \quad (3.22)$$

によって記述できる。以下では、2.3 に述べた2つの配置(ファラデー配置とフォークト配置)について固有値を求める。

3.3.2 ファラデー配置の場合($\theta=0$)

磁化が z 軸方向にあるとして、 z 軸に平行に進む波($\mathbf{N} // z$)に対して式(3.21)は、

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp\{-i\omega(t - Nz/c)\} \quad (3.23)$$

と表される。固有方程式(3.22)は

$$\begin{pmatrix} N^2 - \epsilon_{xx} & -\epsilon_{xy} & 0 \\ \epsilon_{xy} & N^2 - \epsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & -\epsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0 \quad (3.24)$$

と書ける。この方程式が $\mathbf{E} \neq 0$ の解をもつためには、上式において \mathbf{E} の係数の行列式が0でなければならない。こうして次の永年方程式を得る。(問題3.2参照)

$$\begin{vmatrix} N^2 - \epsilon_{xx} & -\epsilon_{xy} & 0 \\ \epsilon_{xy} & N^2 - \epsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & -\epsilon_{zz} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.25)$$

これより、 $(N^2 - \epsilon_{xx})^2 + \epsilon_{xy}^2 = 0$ となり、 N^2 の固有値として2個の値

$$N_{\pm}^2 = \epsilon_{xx} \pm i\epsilon_{xy} \quad (3.26)$$

を得る。これらの固有値に対応する固有関数は、

$$\mathbf{E}_{\pm} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} (i \pm j) \exp\{-i\omega(t - \frac{N_{\pm} z}{c})\} \quad (3.27)$$

ここに i, j は x, y 方向の単位ベクトルである。 \mathbf{E}_+ 、 \mathbf{E}_- は、それぞれ、右円偏光、左円偏光に対応する。なぜ円偏光になるかを、 \mathbf{E}_+ について考えてみよう。この電界ベクトルの x 成分 E_{+x} および y 成分 E_{+y} の実数部はそれぞれ、

$$\begin{aligned} E_{+x} &= \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cos\left\{\omega\left(t - \frac{N_+ z}{c}\right)\right\} \\ E_{+y} &= \frac{E_0}{\sqrt{2}} \sin\left\{\omega\left(t - \frac{N_+ z}{c}\right)\right\} \end{aligned} \quad (3.28)$$

となり、その軌跡は円になる。

いま、位置を $z=0$ に固定して考えると、

$E_{+x} = (E_0/\sqrt{2}) \cos \omega t$ 、 $E_{+y} = (E_0/\sqrt{2}) \sin \omega t$ となり、 x 成分は y 成分に対し 90° 位相が進んでいるので、 \mathbf{E}_+ のベクトル軌跡は、図3.3に示すように右回りの円を描く。このことは、オシロスコープの x 軸に $\sin \omega t$ で変化する信号を入れ、 y 軸に $\cos \omega t$ で変化する信号を入れたときに、そのリサージュ図形が右回りの円になることを思い浮かべれば理解しやすい。

以上のことから式(3.13)で示されるような誘電テンソル ϵ (\mathbf{M}) を持った媒質中を \mathbf{M} と平行に伝わる波の固有状態は左まわり、または、右まわりの円偏光であることが示された。ここで、もし $\tilde{\epsilon}$ テンソルの非対角成分 ϵ_{xy} がなければ、(3.25)の固有値は $N_{\pm}^2 = \epsilon_{xx}$ となって、円偏光はもはや固有状態ではなくなり、旋光性や円二色性は生じない。このことから、旋光性および円二色性の起源は $\tilde{\epsilon}$ テンソルの非対角成分にあることが理解されたと思う。

3.3.3 フォークト配置の場合

^{††}波数 K は $K = 2\pi/\lambda'$ となる。ここに λ' は媒質中での波長で、媒質中での光速を c' とすると $\lambda' = 2\pi c'/\omega$ と表される。媒質中での光速 c' は屈折率を n とすると c/n で与えられるから、 $K = \omega n/c$ である。ここで屈折率を拡張して複素屈折率 N 、すなわち、 $N = n + i\kappa$ を導入すると、 $K = \omega N/c = \omega n/c + i\omega\kappa/c$ となる。

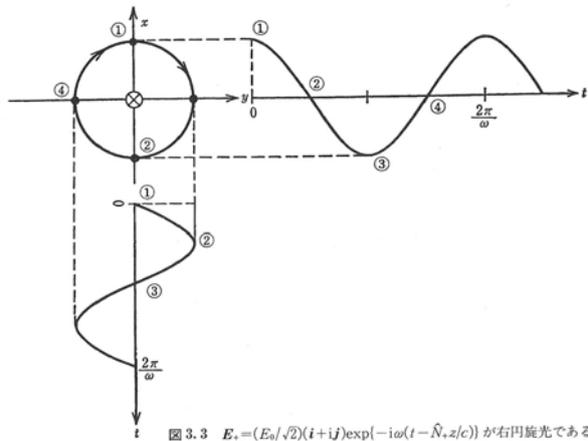


図3.3 $\mathbf{E}_+ = (E_0/\sqrt{2})(i + j)\exp\{-i\omega(t - N_+ z/c)\}$ が右円偏光であること

磁化 M に垂直な x 軸に平行に進む波 (N/x) に対しては、式(3.21)は、

$$\mathbf{E} = E_0 \exp\{-i\omega(t - Nx/c)\} \quad (3.29)$$

と表される。固有方程式(3.22)は

$$\begin{pmatrix} -\varepsilon_{xx} & -\varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & N^2 - \varepsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & N^2 - \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0 \quad (3.30)$$

となるので、永年方程式は

$$\begin{vmatrix} -\varepsilon_{xx} & -\varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & N^2 - \varepsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & N^2 - \varepsilon_{zz} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.31)$$

で表される。これを解くと、 $\{\varepsilon_{xy}^2 - \varepsilon_{xx}(N^2 - \varepsilon_{xx})\}(N^2 - \varepsilon_{zz}) = 0$ となり、 N^2 の固有値として

$$N_1^2 = \varepsilon_{xx} + \frac{\varepsilon_{xy}^2}{\varepsilon_{xx}} \text{ および } N_2^2 = \varepsilon_{zz} \text{ という 2 つの解を得る。} \quad (3.32)$$

N_1 および N_2 に対応する固有関数は

$$\begin{aligned} E_1 &= A \exp\left\{-i\omega\left(t - \frac{N_1}{c}x\right)\right\} (\varepsilon_{xy}\mathbf{i} - \varepsilon_{xx}\mathbf{j}) \\ E_2 &= B \exp\left\{-i\omega\left(t - \frac{N_2}{c}x\right)\right\} \mathbf{k} \end{aligned} \quad (3.33)$$

となり、複屈折を生じる。このような磁化と光の進行方向が直交する磁気光学効果はコットンムートン効果として知られ、3.7 に詳しく述べる。

3.3.4 誘電率テンソルと導電率テンソルの関係

次に前節で先送りにした、 $\tilde{\varepsilon}$ テンソルと $\tilde{\sigma}$ テンソルの関係を導いておく。

\mathbf{D} を分極 \mathbf{P} を用いて表すと

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

マクスウェル方程式(3.17)の第2式の右边は、

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mathbf{J}$$

となるが、この式の右边第2項は分極電流 (変位電流)、第3項は伝導電流であるから、2つの電流の和を \mathbf{J}' とおき、さらに

$$\mathbf{J} = \tilde{\sigma} \mathbf{E}$$

と置き換えると、

$$\text{rot } \mathbf{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \tilde{\sigma} \mathbf{E} \quad (3.34)$$

と書き表すことができる。さらに \mathbf{H} および \mathbf{E} に式(3.21)の形の解を仮定すると式(3.17)の第2式は

$$\mathbf{K} \times \mathbf{H} = -\omega \varepsilon_0 \left(\mathbf{1} + i \frac{\tilde{\sigma}}{\omega \varepsilon_0} \right) \mathbf{E} = -\omega \varepsilon_0 \tilde{\varepsilon} \mathbf{E}$$

となる。ここに $\mathbf{1}$ は2階の単位テンソルである。これより、誘電テンソルと伝導率テンソルの間の関係として、

$$\tilde{\varepsilon} = \mathbf{1} + i \frac{\tilde{\sigma}}{\omega \varepsilon_0} \quad (3.35)$$

を得る。テンソル成分で表せば、

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} + i \frac{\sigma_{ij}}{\omega \varepsilon_0} \quad (3.36)$$

が導かれた。ここに、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタである。

3. 3節のまとめ

光の伝搬をマクスウェルの方程式で記述すると、磁化された等方性物質の屈折率 N は $N_{\pm}^2 = \varepsilon_{xx} \pm i\varepsilon_{xy}$ で与えられる2つの固有値をとり、それぞれが右円偏光および左円偏光に対応する。(ここに、 ε_{xx} は誘電テンソルの対角成分、 ε_{xy}

は非対角成分である。)もし、 ε_{xy} が0であれば、円偏光は固有関数ではなく、磁気光学効果は生じない。

3.4 ファラデー効果の現象論

3.3節で述べたようにテンソルの非対角成分が存在すると、物質の左右円偏光に対する応答の違いを生じ、その結果ファラデー効果が生じる。ファラデー効果の回転角、楕円率などが誘電率テンソル ε の成分を使ってどのように書き表せるかを述べるのが、この節の目的である。

結論から先に述べると、ファラデー回転角 ϕ_F 、ファラデー楕円率 η_F は式(3.43)のように、 ε_{xy} の実数部と虚数部との一次結合で与えられることが導かれる。これを導くために、まず、右円偏光および左円偏光に対する屈折率 n_+ と n_- 、消光係数 κ_+ と κ_- 、および ε_{xy} との関係を導いておこう。

3.4.1 左右円偏光に対する光学定数の差と誘電率テンソルの成分の関係

3.3節に述べたことから、磁化と平行に進む光の複素屈折率の固有値は式(3.26)で与えられる。ここに $N_+ = n_+ + i\kappa_+$ および $N_- = n_- + i\kappa_-$ である。ここで、

$$\Delta n = n_+ - n_-; \Delta \kappa = \kappa_+ - \kappa_-; n = \frac{n_+ + n_-}{2}; \kappa = \frac{\kappa_+ + \kappa_-}{2}$$

という置き換えをすると、

$$N_{\pm} = n \pm \frac{\Delta n}{2} + i \left(\kappa \pm \frac{\Delta \kappa}{2} \right) = (n + i\kappa) \pm \frac{1}{2} (\Delta n + i\Delta \kappa) \equiv N \pm \frac{1}{2} \Delta N \quad (3.37)$$

となる。ここに

$$\Delta N = N_+ - N_- = \Delta n + i\Delta \kappa \quad (3.38)$$

である。式(3.37)の2番目の式を、式(3.26)に代入して両辺の実数部同士、虚数部同士比較することによって

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{xx} &= n^2 - \kappa^2 \\ \varepsilon''_{xx} &= 2n\kappa \\ \varepsilon'_{xy} &= n\Delta \kappa + \kappa\Delta n \\ \varepsilon''_{xy} &= \kappa\Delta \kappa - n\Delta n \end{aligned} \quad (3.39)$$

が得られる。(問題3.3参照)ただし、 Δn 、 $\Delta \kappa$ が n 、 κ に比べて十分小さいとして、高次の項を無視した。

式(3.39)の最初の2式は通常非磁性の媒質で成り立つ式と同じである。磁化の存在は誘電率テンソルの非対角成分を通じて左右円偏光に対する光学定数の差 Δn 、 $\Delta \kappa$ を生じるが、 Δn と $\Delta \kappa$ は式(3.37)の後の2式を逆に解いて、次式のように表される。

$$\begin{aligned} \Delta n &= \frac{\kappa \varepsilon'_{xy} - n \varepsilon''_{xy}}{n^2 + \kappa^2} \\ \Delta \kappa &= \frac{n \varepsilon'_{xy} + \kappa \varepsilon''_{xy}}{n^2 + \kappa^2} \end{aligned} \quad (3.40)$$

この式を、式(3.38)で定義される ΔN に書き直すと

$$\Delta N = \Delta n + i\Delta \kappa = \frac{i(n - i\kappa)(\varepsilon'_{xy} + i\varepsilon''_{xy})}{n^2 + \kappa^2} = \frac{i\varepsilon_{xy}}{\sqrt{\varepsilon_{xx}}} \quad (3.41)$$

3.4.2 ファラデー効果と誘電率テンソル

以上で誘電率テンソルと ΔN の関係が導かれたので、今度は観測される ϕ_F 、 η_F が ΔN を用いてどのように表せるかを述べる。

まず、図3.4に示すように xz 面を振動面とする直線偏光 \mathbf{E}_{in} が物質に入射したとする。ここに光の進行方向は z 軸の向きである。 x 軸の単位ベクトルを \mathbf{i} 、 y 軸の単位ベクトルを \mathbf{j} とすると入射光の電界ベクトルは次式で与えられる。

$$\mathbf{E}_{in} = E_0 \exp(-i\omega t) \mathbf{i} \quad (3.42)$$

ここで、右円偏光単位ベクトル \mathbf{r} と、左円偏光単位ベクトル \mathbf{l} を次式のように定義する。

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{i} + i\mathbf{j}) \\ \mathbf{l} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{i} - i\mathbf{j}) \end{aligned} \quad (3.43)$$

式(3.42)を \mathbf{r} と \mathbf{l} を使って表すと、

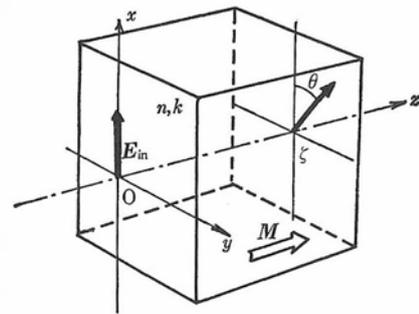


図3.4 座標系のとり方
光の進行方向(=磁化の方向)を z 軸正の向きに、入射直線偏光の電界の振動方向を x 軸にとる。回転角は図の方向を正とする。

$$\mathbf{E}_{in} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \exp(-i\omega t)(\mathbf{r} + \mathbf{l}) \quad (3.44)$$

のように表される。

物質中の屈折率は右円偏光に対しては N_+ 、左円偏光に対しては N_- である。表面を $z=0$ として物質中の $z=\zeta$ の位置では、位相がそれぞれ $\exp(i\omega N_+ \zeta / c)$ および $\exp(i\omega N_- \zeta / c)$ だけ進むので、

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{out} &= \frac{E_0}{\sqrt{2}} \exp(-i\omega t) \left\{ \exp(i\omega N_+ \zeta / c) \mathbf{r} + \exp(i\omega N_- \zeta / c) \mathbf{l} \right\} \\ &= \frac{E_0}{\sqrt{2}} \exp\left\{-i\omega\left(t - \frac{N}{c}\zeta\right)\right\} \left\{ \exp(i\omega \frac{\Delta N}{2c} \zeta) \mathbf{r} + \exp(-i\omega \frac{\Delta N}{2c} \zeta) \mathbf{l} \right\} \end{aligned} \quad (3.45)$$

と表される。ここで $N_+ = N + \Delta N / 2$, $N_- = N - \Delta N / 2$ と置き換えた。

ここで、ふたたび、もとの xy 座標系に戻すと

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{out} &= \frac{E_0}{2} \exp\left\{-i\omega\left(t - \frac{N}{c}\zeta\right)\right\} \times \\ &\quad \left[\left\{ \exp(i\omega \frac{\Delta N}{2c} \zeta) + \exp(-i\omega \frac{\Delta N}{2c} \zeta) \right\} \mathbf{i} + i \left\{ \exp(i\omega \frac{\Delta N}{2c} \zeta) - \exp(-i\omega \frac{\Delta N}{2c} \zeta) \right\} \mathbf{j} \right] \end{aligned} \quad (3.45')$$

さらに式(3.38)を使って書き直すと

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{out} &= E_0 \exp\left\{-i\omega\left(t - \frac{N}{c}\zeta\right)\right\} \times \\ &\quad \left[\left\{ \cos\left(\frac{\omega \Delta n}{2c} \zeta\right) - i \frac{\omega \Delta \kappa}{2c} \zeta \sin\left(\frac{\omega \Delta n}{2c} \zeta\right) \right\} \mathbf{i} - \left\{ \sin\left(\frac{\omega \Delta n}{2c} \zeta\right) + i \frac{\omega \Delta \kappa}{2c} \zeta \cos\left(\frac{\omega \Delta n}{2c} \zeta\right) \right\} \mathbf{j} \right] \end{aligned} \quad (3.46)$$

(問題 3.5 参照) 図 3. 5 に示すように、座標系を z 軸の回りに $\theta = -(\omega \Delta n \zeta / 2c)$ だけ回転した座標系を $x'y'z'$ で表しその単位ベクトルを i', j', k' とすると、座標変換の式は

$$\begin{pmatrix} i' \\ j' \\ k' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

で表せる。(問題 3.6 参照)これを使って \mathbf{E}_{out} は次のように書き直せる。

$$\mathbf{E}_{out} = E_0 \exp\left\{-i\omega\left(t - \frac{N}{c}\zeta\right)\right\} \left(i' - i \left(\frac{\omega \Delta \kappa}{2c} \zeta\right) j' \right) \quad (3.48)$$

もし、磁気円二色性がないとすると $\Delta \kappa = 0$ であるから、 \mathbf{E}_{out} は i' 成分のみとなり、 x' 軸方向の直線偏光であることがわかる。入射直線偏光は x 軸から x' 軸へと θ だけ回転したのである。これがファラデー回転角 θ_F である。すなわち、ファラデー回転角は

$$\theta_F = -\frac{\omega \Delta n}{2c} \zeta \quad (3.49)$$

となる。回転角 θ_F の符号のとりかたはここでは右手系にとったが、理科年表などでは観測者からみて右まわりを正にとっているので、この定義による回転角を ϕ_F とすると

$$\phi_F = -\theta_F = \frac{\omega \Delta n}{2c} \zeta \quad (3.50)$$

となる。 $\Delta \kappa \neq 0$ のときは、式(3.48)は x' 軸を長軸、 y' 軸を短軸とする楕円偏光になる。この楕円偏光の楕円率 η_F は短軸と長軸の振幅の比で与えられ、

$$\eta_F = -\frac{\omega \Delta \kappa}{2c} \zeta \quad (3.51)$$

と表される。右円偏光に対する吸収が左円偏光に対する吸収より強いと、出射電界ベクトルの軌跡は左回りの楕円となるので、楕円率は負となる。

いま、複素ファラデー回転角を

$$\Phi_F = \theta_F + i\eta_F \quad (3.52)$$

によって定義すると、

$$\Phi_F = -\frac{\omega}{2c} (\Delta n + i\Delta \kappa) \zeta = -\frac{\omega \Delta N}{2c} \zeta \quad (3.53)$$

と書ける。この式に式(3.41)を代入すると

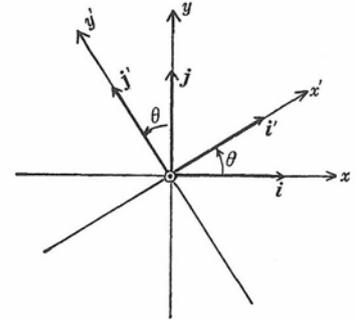


図 3.5 z 軸のまわりに θ だけ回転した座標系 $x'y'z'$ 軸は紙面に垂直上向きにとる。

$$\Phi_F = -\frac{\omega}{2c} \cdot \frac{i\varepsilon_{xy}}{\sqrt{\varepsilon_{xx}}} \zeta \quad (3.54)$$

となり、複素ファラデー回転角は比誘電率の非対角成分 ε_{xy} に比例し、対角成分の平方根に反比例することがわかる。実数部と虚数部に分けて記述すると

$$\begin{aligned} \theta_F &= -\frac{\omega}{2c} \cdot \frac{\kappa\varepsilon'_{xy} - n\varepsilon''_{xy}}{n^2 + \kappa^2} \zeta \\ \eta_F &= -\frac{\omega}{2c} \cdot \frac{n\varepsilon'_{xy} + \kappa\varepsilon''_{xy}}{n^2 + \kappa^2} \zeta \end{aligned} \quad (3.55)$$

このように、ファラデー回転角と楕円率は誘電テンソルの非対角成分の実数部と虚数部の線形結合で表されることがわかった。

実験でファラデー回転角と楕円率が得られたとき、比誘電率の非対角成分を求めるには、

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{xy} &= -\frac{2c}{\omega\zeta} (n\eta_F + \kappa\theta_F) \\ \varepsilon''_{xy} &= -\frac{2c}{\omega\zeta} (\kappa\eta_F - n\theta_F) \end{aligned} \quad (3.56)$$

通常ファラデー効果は、透明な領域で測定されるので、式(3.55)において $\kappa=0$ と置くと、

$$\begin{aligned} \theta_F &= \frac{\omega\varepsilon''_{xy}}{2cn} \zeta \\ \eta_F &= -\frac{\omega\varepsilon'_{xy}}{2cn} \zeta \end{aligned} \quad (3.57)$$

となつて、回転角が ε_{xy} の虚数部に、楕円率が ε_{xy} の実数部に対応することがわかる。

ファラデー楕円率は磁気円二色性(MCD)と単純な式で結ぶことができる。よく知られているように、光吸収の吸収係数 α は $\alpha = 2\omega\kappa/c$ で与えられる。円二色性 $\Delta\alpha$ は右円偏光の吸収係数 α_+ と左円偏光の吸収係数 α_- との差で表されるので

$$\Delta\alpha = \alpha_+ - \alpha_- = \frac{2\omega}{c} \Delta\kappa$$

となり、これに式(3.51)を使うとこの式は、次式のようになる。

$$\Delta\alpha = \frac{2\omega}{c} \cdot \left(-\frac{2c}{\omega\zeta} \right) = -\frac{4\eta_F}{\zeta} \quad (3.58)$$

従つて、MCDは単位長あたりのファラデー楕円率の4倍に等しい。

具体例

やや抽象的な式が続いたので、多少具体的な例を示しておこう。

図3.6にはビスマスを添加したYIG(イットリウム鉄ガーネット: $\text{Y}_{3-x}\text{Bi}_x\text{Fe}_5\text{O}_{12}$)の誘電テンソルの対角および非対角成分の実数部および虚数部のスペクトルを掲げる。^{**}この物質はフェリ磁性を示す絶縁性結晶で、2.5 eV (~500 nmの波長に相当)以下の光エネルギーに対して殆ど透明であることが図3.6(a)の ε''_{xx} のスペクトル(光の吸収を表す)から知られる。ヘリウムネオン・レーザー光(波長 633 nm ~ 1.9 eV)を用いた場合には、図より $\varepsilon'_{xx}=5.3$ 、 $\varepsilon''_{xx}=0$ と読み取れる。これから光学定

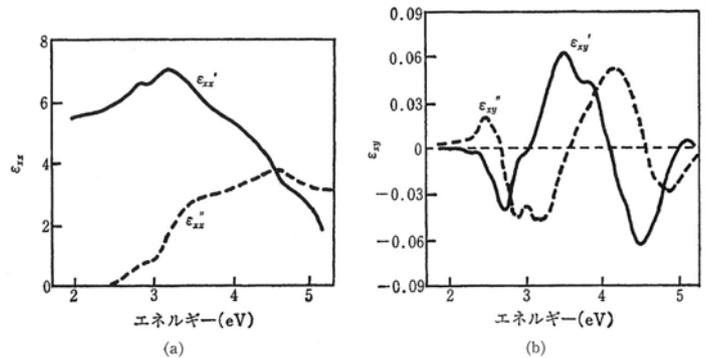


図3.6 Biを添加したYIGの誘電率テンソルのスペクトル²⁾
実線は実数部、点線は虚数部。

** この文献では誘電テンソルを次のように定義している。

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 & -i\varepsilon_1 & 0 \\ i\varepsilon_1 & \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 \end{pmatrix}$$

この定義は伝統的によく用いられる。 ε_0 、 ε_1 と、われわれの誘電率テンソルの成分 ε_{xx} 、 ε_{xy} との間には $\varepsilon_0 = \varepsilon_{xx}$ および $\varepsilon_1 = i\varepsilon_{xy}$ という関係がある。図3.6は、この関係を用いて、われわれの定義に書き直してある。

数を計算すると $n=2.3$ と $\kappa=0$ である。したがって、式(3.56)が成立する。図 3. 6 (b) から、 $\varepsilon'_{xy} \sim 0$ 、 $\varepsilon''_{xy} \sim 0.005$ と読み取れるので、上式から $\eta_F \sim 0$ 、 $\theta_F \sim -1.1 \times 10^2$ (ラジアン) $= -6.3 \times 10^3$ (度) を得る。

3. 4 節のまとめ

・長さ ζ の磁性体におけるファラデー回転角 θ_F およびファラデー楕円率 η_F は、左右円偏光に対する屈折率の差 Δn および消光係数の差 $\Delta \kappa$ を用いて

$$\theta_F = -\theta_F = \omega \Delta n \zeta / 2c \quad (\theta_F \text{ は観測者側から光源を見たとき時計方向を正とする})$$

$$\eta_F = -\omega \Delta \kappa \zeta / 2c$$

・と表される。 ε_{xy} と Δn 、 $\Delta \kappa$ の関係式を用いて

$$\theta_F = -\frac{\omega}{2c} \cdot \frac{\kappa \varepsilon'_{xy} - n \varepsilon''_{xy}}{n^2 + \kappa^2} \zeta$$

$$\eta_F = -\frac{\omega}{2c} \cdot \frac{n \varepsilon'_{xy} + \kappa \varepsilon''_{xy}}{n^2 + \kappa^2} \zeta$$

複素ファラデー回転角を $\Phi = \theta_F + i \eta_F$ と定義すると

$$\Phi_F = -\frac{\omega}{2c} \cdot \frac{i \varepsilon_{xy}}{\sqrt{\varepsilon_{xx}}} \zeta$$

$$\varepsilon_{xy} = (2c/\omega) (\kappa \eta_F - n \theta_F)$$

・なる関係が導かれる

3. 5 反射と光学定数

3.5.1 波数ベクトルの境界条件

次の 3. 6 節では、反射の磁気光学効果における旋光角 (カー回転角 θ_K)、楕円率 η_K と誘電テンソルの非対角成分 ε_{xy}' 、 ε_{xy}'' との関係を導くが、この節ではその準備として反射の際に光の振幅と位相が受ける変化について述べる。⁴⁾

図 3. 7 のように媒質 1 から媒質 2 に向かって、平面波の光が入射するときの反射と屈折を考える。両媒質は均質であり、媒質 1 の屈折率は n_0 で、消光係数は 0、媒質 2 の屈折率は n で、消光係数は κ であるとする。また、それぞれの媒質の誘電率を ε_1 、 ε_2 とする。従って、媒質 1 において $\varepsilon_1 = n_0^2$ が、媒質 2 においては $\varepsilon_2 = (n + i\kappa)^2$ が成立する。

境界面から媒質 2 の中に向かう法線方向を z 軸にとる。光の入射面は xz 面内にあるとする。入射光と法線のなす角 (入射角) を ψ_0 、反射光の法線となす角を ψ_1 、媒質 2 へと屈折する光の法線となす角を ψ_2 とする。

入射光、反射光、屈折光の波数ベクトルをそれぞれ K_0 、 K_1 、 K_2 とすると、各媒質におけるマクスウェルの方程式を解いて、波数ベクトルの絶対値に成り立つ次の関係式を得る。(問題 3.7 参照)

$$K_0 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1}$$

$$K_1 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} \quad (3.59)$$

$$K_2 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_2}$$

境界面内での波数ベクトルの各成分の連続性から、 x 成分については

$$K_{0x} = K_{1x} = K_{2x} \quad (3.60)$$

が成り立つ。

$$K_0 \sin \psi_0 = K_1 \sin \psi_1 = K_2 \sin \psi_2$$

これより

$$\psi_0 = \psi_1$$

$$\frac{\sin \psi_2}{\sin \psi_0} = \frac{K_0}{K_2} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}} = \frac{N_1}{N_2} \quad (3.61)$$

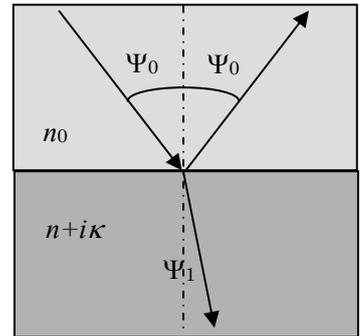
この第 2 式はいわゆるスネルの法則であるが、複素数に拡張されている。

一方、 z 成分については

$$K_{1z} = -K_{0z} = -K_0 \cos \psi_0 = -\frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} \cos \psi_0 \quad (3.62)$$

$$K_{2z} = \sqrt{K_2^2 - K_{2x}^2} = \sqrt{K_2^2 - K_{0x}^2} = \sqrt{K_2^2 - K_0^2 \sin^2 \psi_0} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \psi_0}$$

が成り立つ。(問題 3. 7 参照)



3.5.2 斜め入射の反射の公式

図 3.8 において、入射面（入射光と法線を含む面）を xz としたとき、この面に垂直な電界ベクトルの成分（ y 成分）を E^S と垂直を意味するドイツ語 *senkrecht* の頭文字の S をつけて表し、入射面内の成分を E^P と P (parallel) をつけて表す。入射側には下付の添え字 0 をつけ、反射光には 1 、屈折光には 2 をつける。 x 成分、 y 成分を P 成分、 S 成分を使って表すと

$$\begin{aligned} E_{0x} &= E_0^P \cos \psi_0, E_{0y} = E_0^S \\ E_{1x} &= -E_1^P \cos \psi_0, E_{1y} = E_1^S \end{aligned} \quad (3.63)$$

電界の x 成分、 y 成分の連続性より

$$\begin{aligned} E_{2x} &= E_2^P \cos \psi_2, E_{2y} = E_2^S \\ (E_0^P - E_1^P) \cos \psi_0 &= E_2^P \cos \psi_2 \\ E_0^S + E_1^S &= E_2^S \end{aligned} \quad (3.64)$$

一方、磁界の x 成分、 y 成分についての連続の式は次式で表される。

$$\begin{aligned} (H_0^P - H_1^P) \cos \psi_0 &= H_2^P \cos \psi_2 \\ H_0^S + H_1^S &= H_2^S \end{aligned} \quad (3.65)$$

をマクスウェル方程式

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

から導かれる $H^S = (K/\omega\mu_0)E^P$ 、 $H^P = -(K/\omega\mu_0)E^S$ によって電界についての式に書き直すと、

$$\begin{aligned} K_0(E_0^S - E_1^S) \cos \psi_0 &= K_1 E_2^S \cos \psi_2 \\ K_0(E_0^P + E_1^P) &= K_2 E_2^P \cos \psi_2 \end{aligned} \quad (3.66)$$

が得られる。式(3.64)、式(3.66)の4式を解いて P 偏光、 S 偏光に対する複素振幅反射率（フレネル係数） r_p 、 r_s を求めると、

$$\begin{aligned} r_p &= \frac{E_1^P}{E_0^P} = \frac{K_2 \cos \psi_0 - K_0 \cos \psi_2}{K_2 \cos \psi_0 + K_0 \cos \psi_2} \\ &= \frac{K_2^2 \cos \psi_0 - K_0^2 \sqrt{K_2^2 - K_0^2 \sin^2 \psi_0}}{K_2^2 \cos \psi_0 + K_0^2 \sqrt{K_2^2 - K_0^2 \sin^2 \psi_0}} = \frac{\tan(\psi_0 - \psi_2)}{\tan(\psi_0 + \psi_2)} \\ r_s &= \frac{E_1^S}{E_0^S} = \frac{K_0 \cos \psi_0 - K_2 \cos \psi_2}{K_0 \cos \psi_0 + K_2 \cos \psi_2} \\ &= \frac{K_0 \cos \psi_0 - \sqrt{K_2^2 - K_0^2 \sin^2 \psi_0}}{K_0 \cos \psi_0 + \sqrt{K_2^2 - K_0^2 \sin^2 \psi_0}} = -\frac{\sin(\psi_0 - \psi_2)}{\sin(\psi_0 + \psi_2)} \end{aligned} \quad (3.67)$$

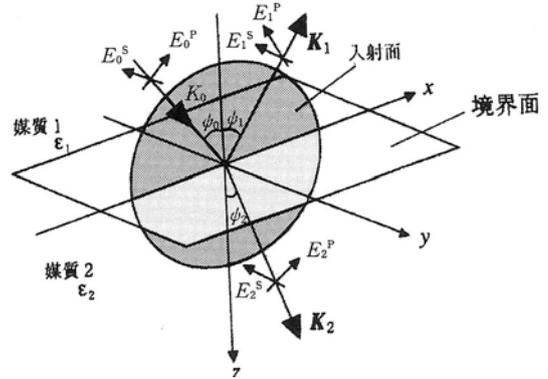
となる。ここに、 $r_p = |r_p| e^{i\delta_p}$ 、 $r_s = |r_s| e^{i\delta_s}$ である。上の各式を導くに当たり、式(3.61)、式(3.62)を用いた。（問題 3.8 参照）

式(3.67)を用い、係数 r_s 、 r_p との比をとり、

$$\frac{r_s}{r_p} = -\frac{\cos(\psi_0 - \psi_2)}{\cos(\psi_0 + \psi_2)} = \left| \frac{r_s}{r_p} \right| \exp(i\delta) \equiv \tan \rho \exp(i\delta) \quad (3.68)$$

とおくと、反射は方位角 ρ と位相差 $\delta = \delta_p - \delta_s$ によって記述できる。いま、真空中から、入射面から 45° 傾いた直線偏光 ($E_s = E_p$) を、誘電率 ϵ_r （複素屈折率 $N = n + i\kappa$ ）の媒体に入射する場合を考える。反射光は一般には楕円偏光になっているが、その p 成分と s 成分の逆正接角 ρ と位相差 δ を測定すれば ϵ_r が求められる。（測定には $1/4$ 波長板と回転検光子を用いる。）この方法を偏光解析またはエリブソメトリという。

光強度についての反射率 R は $|r|^2$ で与えられ、



$$R_p = \left| \frac{\tan(\psi_0 - \psi_2)}{\tan(\psi_0 + \psi_2)} \right|^2 \quad (3.68)$$

$$R_s = \left| \frac{\sin(\psi_0 - \psi_2)}{\sin(\psi_0 + \psi_2)} \right|^2$$

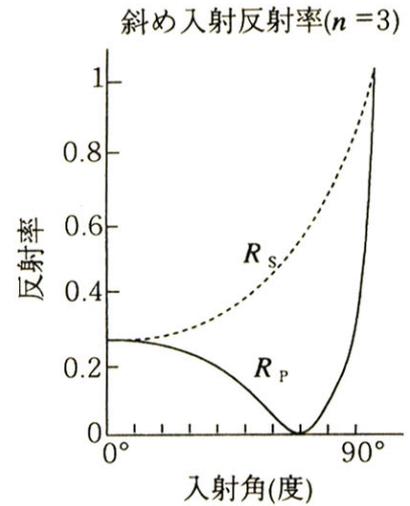
となる。上式において、もし、 $\psi_0 + \psi_2 = \pi/2$ であれば、 \tan が発散するため、 $|r_p|$ は 0 となる。このとき、反射光はS偏光のみとなる。このような条件を満たす入射角をブリュースター角という。

第1の媒体が真空、第2の媒体の複素屈折率が N の場合

$$R_p = \left| \frac{N^2 \cos \psi_0 - \sqrt{N^2 - \sin^2 \psi_0}}{N^2 \cos \psi_0 + \sqrt{N^2 - \sin^2 \psi_0}} \right|^2 \quad (3.69)$$

$$R_s = \left| \frac{\cos \psi_0 - \sqrt{N^2 - \sin^2 \psi_0}}{\cos \psi_0 + \sqrt{N^2 - \sin^2 \psi_0}} \right|^2$$

この式にもとづいて $N=3+i0$ の場合について、 R_p 、 R_s をプロットすると図 3.9 のようになる。 R_p は入射角 70° 付近で 0 となっていることがわかる。この入射角をブリュースター角と呼ぶ。



3.5.3 垂直入射の反射の公式

垂直入射の場合、 $\psi_0=0$ 、従って $\psi_1=0$ 。このとき電界に対する複素振幅反射率 r として、

$$r = r_p = \frac{K_2 - K_0}{K_2 + K_0}$$

を得る。垂直入射の場合、入射光の p 成分 E_0^p の向きと反射光の p 成分 E_1^p の向きとは逆になっていることに注意。

この式に式 (3.59) を代入すると次式に示すようになる。

$$r = \frac{\sqrt{\epsilon_2} - \sqrt{\epsilon_1}}{\sqrt{\epsilon_2} + \sqrt{\epsilon_1}} \quad (3.70)$$

媒質 1 は透明 (屈折率 n_0)、媒質 2 は吸収性 (屈折率 n 、消光係数 κ) とすると、

$$\sqrt{\epsilon_1} = n_0, \quad \sqrt{\epsilon_2} = n + i\kappa$$

となるので、式 (3.70) は

$$r = \frac{N - n_0}{N + n_0} = \frac{n + i\kappa - n_0}{n + i\kappa + n_0} \equiv \sqrt{R} \exp(i\theta) \quad (3.71)$$

と書ける。ここに $R=r^*r=|r|^2$ は光強度の反射率、 θ は反射の際の位相のずれであって、次の2式のように表すことができる。

$$R = \frac{(n_0 - n)^2 + \kappa^2}{(n_0 + n)^2 + \kappa^2} \quad (3.72)$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{-2n_0\kappa}{n^2 + \kappa^2 - n_0^2}$$

以上述べたことから、光が界面に垂直に入射したとき、反射光の強度は入射光の R 倍となり、反射光の位相は入射光の位相から θ だけ遅れることが導かれた。逆に、 R と θ がわかれば、次式で n 、 κ を求めることができる。

$$n = n_0 \frac{1 - R}{1 + R - 2\sqrt{R} \cos \theta} \quad (3.73)$$

$$\kappa = 2n_0 \frac{\sqrt{R} \sin \theta}{1 + R - 2\sqrt{R} \cos \theta}$$

次節で述べるように位相は反射率のスペクトルからクラマース・クローニヒの関係式を使って計算で求めることができる。

3.5.4 クラマース・クローニヒの関係式⁵⁾

誘電率の実数部 ϵ'_{ij} と虚数部 ϵ''_{ij} は決して独立ではなく、両者の間にはクラマース・クローニヒの関係式と呼ばれる分散関係が成り立つ。

$$\begin{aligned}\varepsilon'_{ij}(\omega) &= 1 + \frac{2}{\pi} P \int_0^\infty \frac{x \varepsilon''_{ij}(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' \\ \varepsilon''_{ij}(\omega) &= -\frac{2\omega}{\pi} P \int_0^\infty \frac{\varepsilon'_{ij}(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'\end{aligned}\tag{3.74}$$

ここに、 P は主値をとること、すなわち

$$P \int_0^\infty \frac{f(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_0^{\omega-\rho} \frac{f(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' + \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\omega+\rho}^\infty \frac{f(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'$$

である。発散する位置を避けて積分することを意味する。

式(3.74)の関係は、誘電率ばかりでなく、磁化率、伝導率など外場に対する物質のレスポンスを表す量において成立する関係であり、外場が加えられる前には応答はないという至極当り前のこと（これを因果律という）から導くことができる。（問題 3.19 参照）ここでは誘電率の実数部と虚数部の間に成り立つ定性的な関係について述べておく。

式(3.74)の第2式を部分積分すると、

$$\varepsilon''_{ij}(\omega) = -\frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{\omega - \omega'}{\omega + \omega'} \right| \varepsilon'_{ij}(\omega') \Big|_0^\infty + \frac{1}{\pi} P \int_0^\infty \ln \left| \frac{\omega - \omega'}{\omega + \omega'} \right| \frac{d\varepsilon'_{ij}(\omega')}{dx} dx\tag{3.75}$$

上式右辺の第1項は 0 であるから、結局第2項のみとなる。 $\ln \left| \frac{\omega - \omega'}{\omega + \omega'} \right|$ は $x \sim \omega$ 付近で大きい値をとるので、 ε'' は ε' の微分形に近いスペクトル形状を示すことになる。すなわち、 ε' がピークを持つ ω では ε'' は急激に変化し、 ε' が急激に変化する ω 付近で ε'' は極大（または極小）を示す。

式(3.74)と同様の関係は

$$\ln r = \frac{1}{2} \ln R + i\theta$$

における $(1/2)\ln R$ と θ との間にも成り立つことが Toll によって導かれている⁶⁾。すなわち

$$\theta(\omega) = \frac{\omega}{\pi} P \int_0^\infty \frac{\ln R(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'\tag{3.76}$$

この式が反射スペクトルにおけるクラマース・クローニヒの関係式で、 $R(x)$ のデータが $(0, \infty)$ の範囲に対して知られているならば任意の ω に対する移相量 $\theta(\omega)$ を計算することができる。こうして $\theta(\omega)$ が求まれば式(3.73)によって、光学定数 n と κ を計算できる。 n と κ が得られれば、さらに、式(3.39)により誘電率の実数部 ε'_{ij} および虚数部 ε''_{ij} が計算されることが理解されよう。

クラマース・クローニヒの式はたいそう便利な関係式であるが、次の点に注意して使わなければならない。

(1) 測定できる反射率のスペクトル $R(\omega)$ は、 ω の有限の範囲に限られるので、その範囲外について適当な外挿を行うか、適当な近似を用いて計算することになる。

(2) 数値計算により式(3.76)の主値を求める場合に、被積分関数 $\ln R(\omega')/(\omega'^2 - \omega^2)$ は $\omega' \rightarrow \omega-0$ および $\omega' \rightarrow \omega+0$ に対してそれぞれ $-\infty$ および $+\infty$ に発散するので主値は大きな正の量と負の量との差し引きを求めることになり、コンピュータの精度が問題になってくる。このため収束をよくするためのアルゴリズムの工夫が行われている。

3. 5節のまとめ

垂直入射の場合の複素振幅反射率（フレネル係数） r は次式で与えられる。

$$r = \frac{n + i\kappa - n_0}{n + i\kappa + n_0}$$

反射率 R および移相量 θ は

$$R = \frac{(n_0 - n)^2 + \kappa^2}{(n_0 + n)^2 + \kappa^2} \quad \cdot \text{で与えられる.}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{-2n_0\kappa}{n^2 + \kappa^2 - n_0^2}$$

また、 R と θ との間にはクラマースクローニヒの関係が成り立つ。

$$\theta(\omega) = \frac{\omega}{\pi} P \int_0^\infty \frac{\ln R(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'$$

・ 反射スペクトル R から移相量 θ が計算でき、これらから n と κ が求められる。

$$n = n_0 \frac{1-R}{1+R-2\sqrt{R}\cos\theta}$$

$$\kappa = 2n_0 \frac{\sqrt{R}\sin\theta}{1+R-2\sqrt{R}\cos\theta}$$

3. 6 磁気カー効果の現象論

ファラデー効果の場合と同様にカー効果も誘電率または伝導率テンソルを用いて表すことができる。なぜ誘電率を用いて表すのかというと、ファラデー効果のときと同様に誘電率はマイクロな量との対応が付けやすく、物質本来の性質を表していると考えられるからである。カー効果の場合も、誘電率テンソルの非対角成分 ε_{xy} は θ_K と η_K の一次結合で表されるが、その係数はファラデー効果の場合に比べて複雑な n と κ の関数となっている。これは反射率や移相が屈折率 n や消光係数 κ の非線形関数となっていること（前節参照）に由来している。

カー効果における符号のとり方にも2通りのやり方がある。即ち、入射光側からみて時計方向に回るのを+にとる場合と、半時計方向に回るのを+にとる場合の2種類がある。ここでは、ファラデー効果と同じように入射側からみて時計回りを正にとっておく。

3.6.1 垂直入射極カー効果

いま、我々は問題を複雑にしないために、極カー効果（2.5 節参照）の場合を扱い、しかも入射光は界面に垂直に入射するものとする。2.5 節に述べたように極カー効果は直線偏光が入射したとき、反射光が楕円偏光となり、その楕円の長軸の向きが入射光の偏光方向に対して回転する現象である。この回転をカー回転角 θ_K で表し、楕円の長軸と短軸の比を楕円率 η_K で表す。カー回転角は右円偏光と左円偏光に対する移相量の差に対応し、楕円率は左右円偏光に対する反射率の違いから生じることを示すことができる。

右回り円偏光および左回り円偏光に対する振幅反射率は

$$\hat{r}_{\pm} = \frac{N_{\pm} - n_0}{N_{\pm} + n_0} \quad (3.77)$$

によって表すことができる。

問題 3.10 で導かれるように、右円偏光に対する複素振幅反射率（フレネル係数）を $r_+ \exp(i\theta_+)$ 、左円偏光に対するそれを $r_- \exp(i\theta_-)$ とすると、カー回転角 θ_K は

$$\theta_K = -\frac{\theta_+ - \theta_-}{2} \equiv -\frac{\Delta\theta}{2} \quad (3.78)$$

で与えられる。（これに対して、反射光の進行方向に右ネジをすすめるような回転を正にとるときの回転角を ϕ_K とすると、 $\phi_K = -\theta_K$ となる。）

また、カー楕円率 η_K は

$$\eta_K = \frac{|r_+| - |r_-|}{|r_+| + |r_-|} \equiv \frac{1}{2} \frac{\Delta r}{r} = \frac{1}{4} \frac{\Delta R}{R} \quad (3.79)$$

で表すことができる。

ここで、磁気カー回転角 φ_K と磁気カー楕円率 η_K をひとまとめにした複素カー回転 Φ_K は、

$$\Phi_K = \varphi_K + i\eta_K = -\frac{\Delta\theta}{2} - i\frac{\Delta r}{2r} = -i\frac{\Delta\hat{r}}{2\hat{r}} \approx i\frac{1}{2} \ln\left(\frac{\hat{r}_-}{\hat{r}_+}\right) \quad (3.80)$$

である。ここに \hat{r} 、 Δr は、 $\hat{r} = (r_+ + r_-)/2$ 、 $\Delta r = r_+ - r_-$

で与えられる^{§§}。この式と式(3.77)とから、次式を得る。（問題 3.11 参照）

$$\Phi_K \approx \frac{n_0 \varepsilon_{xy}}{(n_0^2 - \varepsilon_{xx}) \sqrt{\varepsilon_{xx}}} \quad (3.81)$$

この式から、カー効果が誘電率の非対角成分 ε_{xy} に依存するばかりでなく、分母に来る対角成分 ε_{xx} にも依存することがわかる。この式の対角成分 ε_{xx} を光学定数 n 、 κ によって表すと、

§§ $\hat{r} = r \exp(i\theta)$ を微分して $\Delta\hat{r} = \left(\frac{\Delta r}{r} + i\Delta\theta\right) r \exp(i\theta) = \left(\frac{\Delta r}{r} + i\Delta\theta\right) \hat{r}$

従って、 $\frac{\Delta r}{r} + i\Delta\theta = \frac{\Delta\hat{r}}{\hat{r}} \approx \ln\left(1 + \frac{\Delta\hat{r}}{\hat{r}}\right) = \ln\frac{2\hat{r} + \Delta\hat{r}}{2\hat{r} - \Delta\hat{r}} = \ln\frac{\hat{r}_+}{\hat{r}_-} = -\ln\frac{\hat{r}_-}{\hat{r}_+}$

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon'_{xx} + i\varepsilon''_{xx} = (n^2 - \kappa^2) + i2n\kappa$$

と書けるので、(3.81)に代入して整理することによって、

$$\begin{aligned} \theta_K &= n_0 \frac{n(n_0^2 - n^2 + 3\kappa^2)\varepsilon'_{xy} + \kappa(n_0^2 - 3n^2 + \kappa^2)\varepsilon''_{xy}}{(n^2 + \kappa^2)\left\{(n_0^2 - n^2 - \kappa^2)^2 + 4n_0^2\kappa^2\right\}} \\ \eta_K &= n_0 \frac{-\kappa(n_0^2 - 3n^2 + \kappa^2)\varepsilon'_{xy} + n(n_0^2 - n^2 + 3\kappa^2)\varepsilon''_{xy}}{(n^2 + \kappa^2)\left\{(n_0^2 - n^2 - \kappa^2)^2 + 4n_0^2\kappa^2\right\}} \end{aligned} \quad (3.82)$$

を得る。誘電率テンソルの非対角成分を θ_K 、 η_K を用いて表す式は問題 3.12 に、 θ_K 、 η_K を導電率テンソルで表す式は問題 3.13 に示す。

3.6.2 極カー回転に対するクラマース・クローニヒの関係

前節に述べた式(3.76)と同様の関係がカー回転角 θ_K とカー楕円率 η_K との間にも成り立つ。即ち、

$$\begin{aligned} \theta_K(\omega) &= \frac{2}{\pi} P \int_0^\infty \frac{\omega' \eta_K(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' \\ \eta_K(\omega) &= -\frac{2\omega}{\pi} P \int_0^\infty \frac{\theta_K(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' \end{aligned} \quad (3.83)$$

ここに、楕円率 η_K と反射の磁気円二色性 $\Delta R/R$ との間には $\Delta R/R = 4\eta_K$ なる関係式が成り立つ。測定範囲は限られた周波数範囲($\omega < \alpha$)であるが、Smithによると、その周波数範囲より高い周波数の η_K からの寄与が単にバックグラウンドとしてしか効かないときには、 $\omega < \alpha$ に対して次の分散式がよい近似となる⁸⁾。

$$\theta_K = \frac{2\omega^2}{\pi} P \int_0^\infty \frac{\eta_K(\omega')}{\omega'(\omega'^2 - \omega^2)} d\omega' \quad (3.84)$$

3.6.3 斜め入射の極カー効果

次に、斜め入射の場合を考える。いま、Eベクトルが入射面内にあるp偏光が入射角 φ_0 で入射したとき、界面を透過した光の屈折角 φ_2 とすると複素カー回転角 Φ_K は

$$\tan \Phi_K = \frac{r_{sp}}{r_{pp}} \quad (3.85)$$

のように r_{sp}/r_{pp} によって表される。ここに、 r_{sp} は入射p偏光成分に対し、Eベクトルが入射面に垂直なs偏光成分が反射光として現れる比率を表す。 r_{pp} は、入射p偏光に対しp偏光が反射される比率を表す。このときの r_{sp} 、 r_{pp} を誘電率を使って表すと

$$r_{sp} = r_{ps} = -\frac{\varepsilon_{xy} \cos \varphi_0}{\sqrt{\varepsilon_{xx}} \left(\cos \varphi_0 + \sqrt{\varepsilon_{xx}} \cos \varphi_2 \right) \left(\cos \varphi_2 + \sqrt{\varepsilon_{xx}} \cos \varphi_0 \right)} \quad (3.86)$$

$$r_{pp} = \frac{\sqrt{\varepsilon_{xx}} \cos \varphi_0 - \cos \varphi_2}{\sqrt{\varepsilon_{xx}} \cos \varphi_0 + \cos \varphi_2} \quad (3.87)$$

複素カー回転角を Φ_K とすると、 Φ_K は次式で与えられる。

$$\tan \Phi_K = \frac{r_{sp}}{r_{pp}} = \frac{\varepsilon_{xy} \cos \varphi_0}{\sqrt{\varepsilon_{xx}} \left(\cos \varphi_0 + \sqrt{\varepsilon_{xx}} \cos \varphi_2 \right) \left(\cos \varphi_2 - \sqrt{\varepsilon_{xx}} \cos \varphi_0 \right)} \quad (3.88)$$

ここに、 φ_0 と φ_2 の間にはスネルの法則が成立する。すなわち、

$$\frac{\sin \varphi_0}{\sin \varphi_2} = \frac{\sqrt{\varepsilon_{xx}}}{n_0} \quad (3.89)$$

である。 φ_0 は実数であるが、誘電率は複素数なので φ_2 は複素数である。式(3.88)で $\varphi_0 = \varphi_2 = 0$ とおけば、垂直入射の場合の式(3.81)が得られる。

3.6.4 縦カー効果ⁱ⁾

磁化の向きが反射面内にあつて、かつ光の入射面に平行な場合を縦カー効果と呼ぶ。電界が入射面に平行に偏光している光（p偏光）が、磁化された表面から斜めに反射されたとき反射光のp成分は、通常の金属による反射の場合とほとんど同様に振る舞うのであるが、磁化が存在することによってわずかにs成分（入射面に垂直に振動する成分）が生じる。一般にこの第2の電界成分は反射p成分と同位相ではなく、一定の位相差を有する。従って、反射光は楕円の主軸がp面から少し回転しているような楕円偏光である。磁化の反転によって回転はp面について対称な方向に起きる。同様の効果は入射光がs偏光の場合にもいえる。この場合のカー回転、楕円率はs方位について対称に起きる。この効

果の大きさは、入射角に依存する。

前項に述べた斜め入射の場合の極カー効果と同様に、縦カー効果の複素カー回転角 Φ_K は

$$\tan \Phi_K = \frac{r_{sp}}{r_{pp}}$$

で与えられる。縦カー効果の場合の r_{sp} は、誘電テンソルを用いて、

$$r_{sp} = \frac{\epsilon_{xy} \cos \varphi_0 \sin \varphi_2}{\epsilon_{xx} \cos \varphi_2 (\sqrt{\epsilon_{xx} \cos \varphi_2 + \cos \varphi_0}) (\sqrt{\epsilon_{xx} \cos \varphi_0 + \cos \varphi_2})} \quad (3.90)$$

によって与えられることが導かれる。 r_{pp} については(6.19)式が成立するので、これらより $\tan \Phi_K$ を求めると、

$$\tan \Phi_K = \frac{\epsilon_{xy} \cos \varphi_0 \sin \varphi_2}{\epsilon_{xx} (\sqrt{\epsilon_{xx} \cos \varphi_0 - \cos \varphi_2}) (\sqrt{\epsilon_{xx} \cos \varphi_2 + \cos \varphi_0})} \quad (3.91)$$

が得られる。 Φ_K の実数部が縦カー回転角、虚数部が縦カー楕円率を与える。 φ_0 と φ_2 との間には極カー効果の時と同様、スネルの法則が成立する。

3.6.5 横カー効果

磁化の方向が入射面に垂直な場合、入射 s 偏光に対しては何らの効果も及ぼさない。p 偏光を入射した場合にのみ、その反射強度が磁化に依存して変化する効果として現れる。 r_{sp} の成分は生じないので偏光の回転は起きない。 r_{pp} を誘電テンソルの成分を使って表すと、

$$r_{pp} = \frac{\epsilon_{xx} \cos \varphi_0 - \left(\cos \varphi_2 + \frac{\epsilon_{xy}}{\epsilon_{xx}} \sin \varphi_2 \right)}{\epsilon_{xx} \cos \varphi_0 + \left(\cos \varphi_2 + \frac{\epsilon_{xy}}{\epsilon_{xx}} \sin \varphi_2 \right)} \quad (3.92)$$

となる。反射光の強度は $|r_{pp}|^2$ に比例する。磁化の効果は ϵ_{xy} を通じて現れる。

3. 6 のまとめ

垂直入射の極カー効果において、複素カー回転 $\Phi_K = \theta_K + i\eta_K$ は

$$\Phi_K = \frac{n_0 \epsilon_{xy}}{(n_0^2 - \epsilon_{xx}) \sqrt{\epsilon_{xx}}}$$

で表され、非対角成分だけでなく対角成分にも依存することがわかった。

縦カー効果の複素カー回転は

$$\tan \Phi_K = \frac{\epsilon_{xy} \cos \varphi_0 \sin \varphi_2}{\epsilon_{xx} (\sqrt{\epsilon_{xx} \cos \varphi_0 - \cos \varphi_2}) (\sqrt{\epsilon_{xx} \cos \varphi_2 + \cos \varphi_0})}$$

で与えられる。

3. 7 コットンムートン効果

ファラデー効果は光の進行方向と磁界とが平行な場合の磁気光学効果であったが、コットンムートン効果は光の進行方向と磁界とが垂直な場合（フォークト配置）の磁気光学効果である。この効果は磁化 M の偶数次の効果であって磁界の向きに依存しない。この効果はフォークト効果あるいは磁気複屈折効果とも呼ばれる。いま、磁化のないとき等方性の物質を考えると複屈折は生じないが、磁化 M が存在すると M の方向に一軸異方性が誘起され、 M 方向に振動する直線偏光（常光線）と M に垂直の方向に振動する光（異常光線）とに対して屈折率の差が生じて、複屈折を起こす現象である。これは 3. 2 節に述べた磁化のある場合の誘電テンソルの対角成分 $\epsilon_{xx}(M)$ と $\epsilon_{zz}(M)$ が一般的には等しくないことから生じる。 ϵ テンソルの対角成分はその対称性から M について偶数次でなければならないので、複屈折によって生じる光学的遅延も M の偶数次となる。コットンムートン効果は導波路型光アイソレータにおいて、モード変換部として用いることができる。以下に、この効果について式を使って説明しよう。

3.3.3 に述べたように、フォークト配置における複素屈折率の固有値 N は式(3.32)に示されるように 2 つの値をとる。すなわち、座標系を図 3.10 のようにとると、

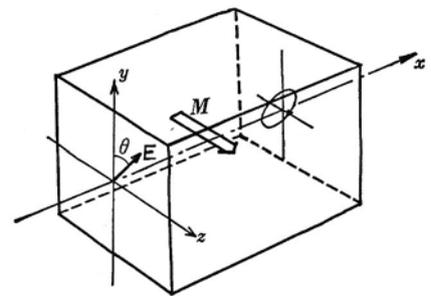


図 3.10 コットンムートン効果の座標系

$$N_1^2 = \varepsilon_{xx} + \frac{\varepsilon_{xy}^2}{\varepsilon_{xx}}$$

$$N_2^2 = \varepsilon_{zz}$$

ここで N_1^2 を式(3.31)に代入すると、 E_x と E_y の関係は次のようになる。

$$E_y = -(\varepsilon_{xy}/\varepsilon_{xx})E_x$$

従って、固有関数は

$$E_1 = A \exp\left\{-i\omega\left(t - \frac{N_1}{c}x\right)\right\}(\varepsilon_{xy}\mathbf{i} - \varepsilon_{xx}\mathbf{j}) \quad (3.93)$$

となる。一方、式(3.31)に N_2^2 を代入すると、次式が得られる。

$$E_2 = B \exp\left\{-i\omega\left(t - \frac{N_2}{c}x\right)\right\}\varepsilon_{zz}\mathbf{k} \quad (3.94)$$

ε_{xy} が0であれば E_1 は y 方向に振動する直線偏光であるが、 $\varepsilon_{xy} \neq 0$ のとき E_1 は xy 面内に振動面を持つことになる。この結果、この波の波面の伝搬方向は x 軸方向であるが、エネルギーの伝搬方向は x 軸から $\tan^{-1}(\varepsilon_{xy}/\varepsilon_{xx})$ だけ傾いたものとなる(問題3.14参照)。このような光線を異常光線と呼んでいる。一方 E_2 は x 方向に伝わる z 方向に振動する普通の光であって正常光線と呼んでいる。

いま、簡単のため $\varepsilon_{xy}=0$ として光学遅延量(リターデーション) δ を計算すると

$$\begin{aligned} \delta &= \omega(N_1 - N_2)\zeta/c = \omega\left(\sqrt{\varepsilon_{xx}} - \sqrt{\varepsilon_{zz}}\right)\zeta/c \\ &\approx \frac{\omega\zeta}{c} \cdot \frac{\varepsilon_{xx}^{(2)}(M) - \varepsilon_{zz}^{(2)}(M)}{2\sqrt{\varepsilon_{xx}^{(0)}}} \end{aligned} \quad (3.95)$$

となる。ここに、 $\varepsilon_{xx}^{(n)}$ 、 $\varepsilon_{zz}^{(n)}$ は ε を M で展開したときの n 次の係数である。第2式を導くに当たっては、 $\varepsilon_{xx}^{(n)}$ 、 $\varepsilon_{zz}^{(n)}$ が十分小さいとした。このように、 δ は M の偶数次の係数のみで表すことができた。また、 ε は正の実数であるとする、 δ も実数である。

もし、入射光が z 軸から θ 傾いた振動面を持つ直線偏光であれば

$$E_{in} = E_0\mathbf{j}' = E_0(\cos\theta\mathbf{j} + \sin\theta\mathbf{k}) \quad (3.96)$$

となる。 y 方向と z 方向の間に δ の光学的遅延があるとき、 $N=(N_1+N_2)/2$ として2つの波の成分を合成すると次式を得る。

$$E_{out} = E_0 \exp(i\omega N\zeta/c) \left\{ \exp(-i\delta/2)\cos\theta\mathbf{j} + \exp(i\delta/2)\sin\theta\mathbf{k} \right\} \quad (3.97)$$

ここで、 j, k 座標系から θ だけ傾いた j', k' 座標系に変換する。

$$\mathbf{j} = \cos\theta\mathbf{j}' + \sin\theta\mathbf{k}'$$

$$\mathbf{k} = -\sin\theta\mathbf{j}' + \cos\theta\mathbf{k}'$$

または、これの逆変換として

$$\mathbf{j} = \cos\theta\mathbf{j}' - \sin\theta\mathbf{k}'$$

$$\mathbf{k} = \sin\theta\mathbf{j}' + \cos\theta\mathbf{k}'$$

を得る。これを式(3.97)に代入すると、

$$E_{out} = E_0 \exp(i\omega \frac{N}{c}\zeta) \left[\left\{ \cos \frac{\delta}{2} + i \sin \frac{\delta}{2} \cos 2\theta \right\} \mathbf{j}' - i \sin \frac{\delta}{2} \sin 2\theta \mathbf{k}' \right] \quad (3.98)$$

となる。ここで $\theta=\pi/4$ とすると次式が得られる。

$$E_{out} = E_0 \exp\left(i\omega \frac{N}{c}\zeta\right) \left(\cos \frac{\delta}{2} \mathbf{j}' - \sin \frac{\delta}{2} \mathbf{k}' \right) \quad (3.99)$$

出射光は y 軸と z 軸とからともに $\pi/4$ 傾いた j', k' 軸を主軸に持つ楕円偏光になっている。その楕円率は $\eta=\tan(\delta/2)$ で与えられる。検光子を用いて入射光の偏光方向に垂直な偏光成分をとりだすと、その強度は

$$I = \frac{E_0^2}{2} \sin^2 \frac{\delta}{2} = \frac{E_0^2(1 - \cos \delta)}{4} \approx \frac{E_0^2 \delta^2}{8}$$

で与えられる。従って、クロスニコル条件のもとで光強度を測定すると、光学的遅延の二乗に比例する信号を得る。このようにしてコットンムートン効果が測定できる。

一方、式(3.97)において $\delta=\pi$ となるように[これは式(3.95)で試料の長さ ζ を適当に選ぶことにより実現できる]した場合

$$E_{out} = -iE_0 \exp\left(i\omega \frac{N}{c}\zeta\right) (\cos 2\theta\mathbf{j}' - \sin 2\theta\mathbf{k}') \quad (3.100)$$

従って、出力光は入射光の振動方向である j' 軸から -2θ 傾いた直線偏光になっていることがわかる。導波路型光アイソレ

ータではコットンムートン効果を相反旋光性素子として用い、非相反素子によって 45°傾いた入射偏光をこの素子でさらに 45°旋光させている(7.2.4 参照)。入射光と 45°傾いた成分の強度は $(1/2)|E_{j'} + E_k|^2$ で与えられ、これは

$$\frac{|E_{j'} + E_k|^2}{2} = \frac{E_0^2}{2} (\cos 2\theta + \sin 2\theta)^2 = \frac{E_0^2}{2} (1 + \sin 4\theta) \quad (3.101)$$

となつて、 $4\theta = \pi/2$ のとき最大になる。つまりこの効果を相反型旋光素子として用いるときに最大のモード変換効率を与えるのは磁化 \mathbf{M} の方向 (つまり z 軸) が、入射偏光の偏光面 (光の磁界成分の向き) と 22.5° の傾きを持つ場合であることが導かれた。このとき \mathbf{E}_{out} は入射光の振動面から 45° 傾いた直線偏光になっている。

- 3. 7 節のまとめ
- コットンムートン効果：光の進行方向が磁化に垂直な場合の磁気光学効果
- 複屈折として観測される。
- 磁化の 2 次に比例 (偶数次のべき級数で展開できる。)
- クロスニコル条件で透過光強度を測れば測定できる。
- 光学的遅延量を 180° にしておくことと偏光面を回転できる。
- 導波型アイソレータの相反旋光素子として用いる。

問題 3. 1 式(3.19)を式(3.18)に代入して式(3.20)を導け。ただし、ベクトル積の公式 $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{A})\mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})\mathbf{C}$ を利用せよ。

(解) 式(3.18)の第 1 式の左辺に式(3.19)の第 1 式を代入すると

$$\text{rot } \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ iK_x & iK_y & iK_z \\ E_x & E_y & E_z \end{pmatrix} = i\mathbf{K} \times \mathbf{E}$$

となる。一方、式(3.18)の第 1 式の右辺に式(3.19)の第 2 式を代入すると

$$-\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = i\omega\mu_0 \mathbf{H}$$

したがって、 $\mathbf{K} \times \mathbf{E} = \omega\mu_0 \mathbf{H}$ が成立する。同様に、 $\mathbf{K} \times \mathbf{H} = -\omega\tilde{\epsilon}\epsilon_0 \mathbf{E}$ が得られる。これらの式から \mathbf{H} を消去すると、

$$\mathbf{K} \times \mathbf{H} = \mathbf{K} \times \frac{1}{\omega\mu_0} (\mathbf{K} \times \mathbf{E}) = \frac{1}{\omega\mu_0} \mathbf{K} \times \mathbf{K} \times \mathbf{E} = -\omega\tilde{\epsilon}\epsilon_0 \mathbf{E}$$

したがって、

$$\mathbf{K} \times \mathbf{K} \times \mathbf{E} = -\omega^2 \tilde{\epsilon}\epsilon_0 \mu_0 \mathbf{E} = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \tilde{\epsilon} \mathbf{E}$$

ここで、 $\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$ を使った。この式の左辺にベクトル積の公式 $\mathbf{K} \times \mathbf{K} \times \mathbf{E} = (\mathbf{E} \cdot \mathbf{K})\mathbf{K} - (\mathbf{K} \cdot \mathbf{K})\mathbf{E}$ を用いると、式(3.20)が得られる。

問題 3. 2 ファラデー配置の場合のマクスウェルの固有方程式(3.24)を導け。

(解) $\hat{N}^2 \mathbf{E} - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{N})\mathbf{N} - \tilde{\epsilon} \mathbf{E} = \mathbf{0}$ において $\mathbf{N} = N\mathbf{k}$ (\mathbf{k} は z 方向の単位ベクトル) を代入すると、

$$\begin{pmatrix} \hat{N}^2 & & \\ & \hat{N}^2 & \\ & & \hat{N}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} - N \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & 0 \\ -\epsilon_{xy} & \epsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

となるので、整理すれば、式(3.24)となる。

問題 3. 3 式(3.39)の関係式を導け。

[ヒント] 式(3.26)の第 1 式 $N_+^2 = \epsilon_{xx} + i\epsilon_{xy}$ に $N_+ = n_+ + i\kappa_+$ 、 $\epsilon_{xx} = \epsilon'_{xx} + i\epsilon''_{xx}$ 、 $\epsilon_{xy} = \epsilon'_{xy} + i\epsilon''_{xy}$ を代入すると $(n_+ + i\kappa_+)^2 = \epsilon'_{xx} + i\epsilon''_{xx} + i(\epsilon'_{xy} + i\epsilon''_{xy})$ 。これに、 $n_+ = n + \Delta n/2$ 、 $\kappa_+ = \kappa + \Delta \kappa/2$ を代入し、 Δn および $\Delta \kappa$ について 1 次の項のみを考える

と、

$$n^2 - \kappa^2 + n\Delta n - \kappa\Delta\kappa + i(2n\kappa + n\Delta\kappa + \kappa\Delta n) = \varepsilon'_{xx} - \varepsilon''_{xy} + i(\varepsilon''_{xx} + \varepsilon'_{xy})$$

同様に $N_-^2 = \varepsilon_{xx} - i\varepsilon_{xy}$ について、

$$n^2 - \kappa^2 - n\Delta n + \kappa\Delta\kappa + i(2n\kappa - n\Delta\kappa - \kappa\Delta n) = \varepsilon'_{xx} + \varepsilon''_{xy} + i(\varepsilon''_{xx} - \varepsilon'_{xy})$$

これらについて、実数部同士、虚数部同士を比較することによって式(3.39)が得られる。

問題 3. 4 式(3.39)を伝導率テンソル σ の式に書換えよ。

[解答]

$$\sigma'_{xx} = 2\omega\varepsilon_0 n\kappa$$

$$\sigma''_{xx} = -\omega\varepsilon_0 (n^2 - \kappa^2 - 1)$$

$$\sigma'_{xy} = \omega\varepsilon_0 (\kappa\Delta\kappa - n\Delta n)$$

$$\sigma''_{xy} = -\omega\varepsilon_0 (n\Delta\kappa + \kappa\Delta n)$$

問題 3. 5 ファラデー効果を受けたとき出射光の式として式(3.46)が導かれることを確かめよ。

式(3.45')に $\Delta N = \Delta n + i\Delta\kappa$ を代入し、 $\exp(\omega\Delta\kappa\zeta/c) \approx 1 + \omega\Delta\kappa\zeta/c$ などの近似式を用いよ。

問題 3. 6 座標系 (xyz) を z 軸の回りに θ だけ (x 軸から y 軸の方向に) 回転して座標系 $(x'y'z')$ が得られたとすると、このときの座標変換の式が式(3.47)で与えられることを確かめよ。

問題 3. 7 入射光、反射光、屈折光の波数ベクトルの絶対値が式(3.59)で与えられること、および、境界面での z 成分の連続の式(3.62)を導け。

[ヒント]

ここでは、3. 3 節と違って進行方向が z 軸方向とは限らないので、電磁波は次のように書ける。

入射光は $\mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t + i\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{r})$, $\mathbf{H}_0 \exp(-i\omega t + i\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{r})$

反射光は $\mathbf{E}_1 \exp(i\omega t + i\mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{r})$, $\mathbf{H}_1 \exp(i\omega t + i\mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{r})$

屈折光は $\mathbf{E}_2 \exp(-i\omega t + i\mathbf{K}_2 \cdot \mathbf{r})$, $\mathbf{H}_2 \exp(-i\omega t + i\mathbf{K}_2 \cdot \mathbf{r})$

として、マクスウェルの方程式に代入する。

その結果

$$\omega\mu_0 \mathbf{H}_0 = \mathbf{K}_0 \times \mathbf{E}_0, \quad \omega\varepsilon_1 \mathbf{E}_0 = -\mathbf{K}_0 \times \mathbf{H}_0$$

$$\omega\mu_0 \mathbf{H}_1 = \mathbf{K}_1 \times \mathbf{E}_1, \quad \omega\varepsilon_1 \mathbf{E}_1 = -\mathbf{K}_1 \times \mathbf{H}_1$$

$$\omega\mu_0 \mathbf{H}_2 = \mathbf{K}_2 \times \mathbf{E}_2, \quad \omega\varepsilon_2 \mathbf{E}_2 = -\mathbf{K}_2 \times \mathbf{H}_2$$

各式から固有値として、

$$K_0^2 = K_1^2 = (\omega/c)^2 \varepsilon_1, \quad K_2^2 = (\omega/c)^2 \varepsilon_2$$

を得る。従って、

$$K_0 = K_1 = (\omega/c)\sqrt{\varepsilon_1}, \quad K_2 = (\omega/c)\sqrt{\varepsilon_2}$$

となり式(3.59)が得られた。

次に、境界面 (xy 面) 内ですべての場合は同一でなければならないから、境界条件

$$E_{0x} + E_{1x} = E_{2x} \quad \text{および} \quad H_{0x} - H_{1x} = H_{2x}$$

$$E_{0y} + E_{1y} = E_{2y} \quad \text{および} \quad H_{0y} - H_{1y} = H_{2y}$$

が成立する。マクスウェルの方程式より、

$$-i\omega\varepsilon_1 \varepsilon_0 E_{0y} = iK_{0z} H_{0x}$$

$$i\omega\varepsilon_1 \varepsilon_0 E_{1y} = iK_{1z} H_{1x}$$

が得られるので、 $K_{1z} = -K_{0z}$ が成立する。 $K_{0z} = K_0 \cos \psi_0$ より、式(3.62)の第1式を得る。

同様に、 $K_{2x} = K_{0x}$ が成立するので、

$$K_{2z} = \sqrt{K_2^2 - K_{2x}^2} = \sqrt{K_2^2 - K_{0x}^2} = \sqrt{(\omega/c)^2 \varepsilon_2 - (\omega/c)^2 \varepsilon_1 \sin^2 \psi_0} = (\omega/c) \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \psi_0}$$

として式(3.62)の第2式が導かれた。

問題 3. 8 斜め入射の場合のフレネル係数の式(3.67)を導け。

① s 波に対する解

電界と磁界の境界面上での連続性により、垂直入射の場合と同様に次の関係式が得られる。

$$E_1 = \{(K_{0z} - K_{2z}) / (K_{0z} + K_{2z})\} E_0$$

これに式(3.62)を代入すると、式(3.67)の第2式が得られる。

② p 波に対する解

p 波においては、磁界が入射面に垂直なので、 \mathbf{H} ベクトルについて計算する方がよい。

H_x の連続性から

$$H_{0x} + H_{1x} = H_{2x}$$

とおける. 一方, E_y の連続性

$$E_{0y} + E_{1y} = E_{2y}$$

は $-i\omega\epsilon_0 E_y = iK_z H_x$ などの式を使って H の式に書き直せる.

$$(K_{0z}/\epsilon_1)(H_{0x} - H_{1x}) = (K_{2z}/\epsilon_2)H_{2x}$$

ここに, $K_{0z} = K_0 \cos \psi_0$; $\epsilon_1 = (c/\omega)^2 K_0^2$; $K_{2z} = K_2 \cos \psi_2$; $\epsilon_2 = (c/\omega)^2 K_2^2$ を代入して

$$K_0^{-1} \cos \psi_0 (H_{0x} - H_{1x}) = K_2^{-1} \cos \psi_2 H_{2x}$$

これと H_x について連続の式から

$$K_2 \cos \psi_0 (H_{0x} - H_{1x}) = K_0 \cos \psi_2 (H_{0x} + H_{1x})$$

これより, 式(3.67)の第2式が導かれる.

問題 3.9 クラマース・クローニヒの関係式(3.74)を導け.

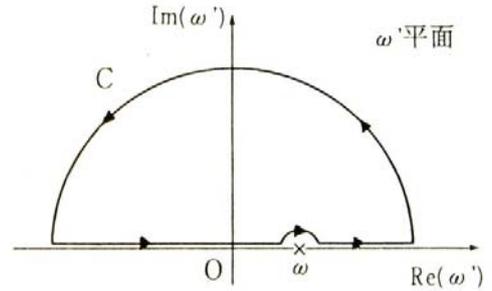
[ヒント]

線形応答関数 $f(\omega)$ が, 図 3.11 に示す ω の複素平面の上半面内で正則, かつ上半平面で $|\omega| \rightarrow \infty$ において $|f(\omega)| \rightarrow 0$, さらに実数 ω に対し $f(-\omega) = f(\omega)$, $f'(-\omega) = -f'(\omega)$ であるような性質を持つておればよい. このような条件が成り立つとき, コーシーの積分公式によって

$$\pi i f(\omega) = \oint_C d\omega' f(\omega') / (\omega' - \omega)$$

が成立する. $f(\omega) = f(\omega) + i f'(\omega)$ を代入し, 両辺の実数部, 虚数部がそれぞれ等しいとおくことによって導くことができる.

ω の複素平面の上半面内で正則, かつ, 上半平面で $|\omega| \rightarrow \infty$ において $|f(\omega)| \rightarrow 0$ という条件は, $t=0$ において外場が加えられたときの応答は $t > 0$ におきるという因果律に対応している.



問題 3.10 極カー効果のカー回転角 θ_K が式(3.78), カー楕円率 η_K が式(3.79)で与えられることを証明せよ.

[解答] 入射光を z 軸方向に進み, x 方向に振動する直線偏光 (振幅 1) であると仮定する. すなわち

$$E_{in} = E_0 \exp(-i\omega t) \mathbf{i} = E_0 \exp(-i\omega t) (\mathbf{r} + \mathbf{l}) / \sqrt{2}$$

右円偏光に対してはフレネル反射係数は $r^+ \exp(i\theta^+)$ で与えられ, 左円偏光に対しては $r^- \exp(i\theta^-)$ であるとすると, 反射光は次式のようになる. (ここで, 左円偏光と右円偏光は, 入射方向からみて定義されていることに注意)

$$E_{out} = (1/\sqrt{2}) \exp(-i\omega t) \{ r^+ \exp(i\theta^+) \mathbf{r} + r^- \exp(i\theta^-) \mathbf{l} \}$$

この式に $\mathbf{r} = (\mathbf{i} + \mathbf{j})/\sqrt{2}$ および $\mathbf{l} = (\mathbf{i} - \mathbf{j})/\sqrt{2}$ を代入し, $\Delta\theta = \theta^+ - \theta^-$, $\theta = (\theta^+ + \theta^-)/2$, および $\Delta r = r^+ - r^-$, $r = (r^+ + r^-)/2$ を用いて書き直すと

$$E_{out} = (1/\sqrt{2}) r \exp(-i\omega t + i\theta) \{ 2(\cos(\Delta\theta/2) \mathbf{i} - \sin(\Delta\theta/2) \mathbf{j}) + i(\Delta r/r)(\sin(\Delta\theta/2) \mathbf{i} + \cos(\Delta\theta/2) \mathbf{j}) \}$$

となる. ここで, \mathbf{i}, \mathbf{j} を $-\Delta\theta/2$ だけ回転した座標系 \mathbf{i}', \mathbf{j}' を考えると,

$$\mathbf{i}' = \cos(\Delta\theta/2) \mathbf{i} - \sin(\Delta\theta/2) \mathbf{j}$$

$$\mathbf{j}' = \sin(\Delta\theta/2) \mathbf{i} + \cos(\Delta\theta/2) \mathbf{j}$$

であるから, E_{out} は

$$E_{out} = (1/\sqrt{2}) \exp(-i\omega t + i\theta) (2\mathbf{i}' + i(\Delta r/r) \mathbf{j}')$$

となつて, 主軸が x 軸から $-\Delta\theta/2$ だけ回転した楕円率 $\eta_K = (1/2)(\Delta r/r)$ の楕円偏光であることが証明される. 反射の磁気円二色性 $\Delta R/R$ と $\Delta r/r$ の間には

$$\Delta R/R = (\Delta r^2)/(r^2) = 2r\Delta r/(r^2) = 2\Delta r/r$$

が成り立つので, $\eta_K = (1/4)(\Delta R/R)$ と表すことができる.

問題 3.11 式(3.81)を証明せよ.

[ヒント]

$$\Phi_K = \varphi_K + i\eta_K = -\frac{\Delta\theta}{2} - i\frac{\Delta r}{2r} = -i\frac{\Delta r}{2r} \approx i\frac{1}{2} \ln\left(\frac{\hat{r}_-}{\hat{r}_+}\right) \quad (3.80)$$

に, 式(3.77)を変形した

$$\hat{r}_\pm = \frac{N_\pm - n_0}{N_\pm + n_0} = \frac{\sqrt{\epsilon_{xx} \pm i\epsilon_{xy}} - n_0}{\sqrt{\epsilon_{xx} \pm i\epsilon_{xy}} + n_0} \approx \frac{\sqrt{\epsilon_{xx}} \left(1 \pm \frac{i\epsilon_{xy}}{2\epsilon_{xx}}\right) - n_0}{\sqrt{\epsilon_{xx}} \left(1 \pm \frac{i\epsilon_{xy}}{2\epsilon_{xx}}\right) + n_0} = \frac{\sqrt{\epsilon_{xx}} - n_0 \pm \frac{i\epsilon_{xy}}{2\sqrt{\epsilon_{xx}}}}{\sqrt{\epsilon_{xx}} + n_0 \pm \frac{i\epsilon_{xy}}{2\sqrt{\epsilon_{xx}}}}$$

$$= \frac{1 \pm \frac{i\epsilon_{xy}}{2\sqrt{\epsilon_{xx}}(\sqrt{\epsilon_{xx}} - n_0)}}{1 \pm \frac{i\epsilon_{xy}}{2\sqrt{\epsilon_{xx}}(\sqrt{\epsilon_{xx}} + n_0)}} \approx 1 \pm \frac{i\epsilon_{xy}}{2\sqrt{\epsilon_{xx}}} \left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon_{xx}} - n_0} - \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{xx}} + n_0} \right) = 1 \pm \frac{i n_0 \epsilon_{xy}}{\sqrt{\epsilon_{xx}}(n_0^2 - \epsilon_{xx})}$$

を代入し、 $\ln(1 \pm x) \approx \pm x$ という近似を使えばよい。

問題 3.12 式(3.82)を逆に解いて誘電率の非対角成分を θ と η で表す式を導け。

[ヒント] $A = n(n_0^2 - n^2 + 3\kappa^2)$, $B = \kappa(n_0^2 - 3n^2 + \kappa^2)$ とおくと,
 $n_0 \varepsilon_{xy}' = A\theta_K - B\eta_K$ および, $n_0 \varepsilon_{xy}'' = B\theta_K + A\eta_K$ の関係が得られる。
 $\varepsilon_{xy}' = \{n(n_0^2 - n^2 + 3\kappa^2)\theta_K - \kappa(n_0^2 - 3n^2 + \kappa^2)\eta_K\}/n_0$
 $\varepsilon_{xy}'' = \{\kappa(n_0^2 - 3n^2 + \kappa^2)\theta_K + n(n_0^2 - n^2 + 3\kappa^2)\eta_K\}/n_0$

問題 3.13 ε_{xy} と θ_K および η_K との関係を与える式(3.82)を, σ_{xy} についての式に書き改めよ。

[解答] $\sigma_{xy} = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon_{xy}$ を代入すればよい。
 $\sigma_{xy}' = \omega\varepsilon_0\varepsilon_{xy}'' = \omega\varepsilon_0\{\kappa(n_0^2 - 3n^2 + \kappa^2)\theta_K + n(n_0^2 - n^2 + 3\kappa^2)\eta_K\}/n_0$
 $\sigma_{xy}'' = -\omega\varepsilon_0\varepsilon_{xy}' = -\omega\varepsilon_0\{n(n_0^2 - n^2 + 3\kappa^2)\theta_K - \kappa(n_0^2 - 3n^2 + \kappa^2)\eta_K\}/n_0$

が得られる。

この式を逆に解くことにより, 次の式が求まる。

$$\theta_K = n_0 \frac{\varepsilon_0 \left\{ \kappa(n_0^2 - 3n^2 + \kappa^2) \sigma_{xy}' - n(n_0^2 - n^2 + 3\kappa^2) \sigma_{xy}'' \right\}}{\omega(n^2 + \kappa^2) \left\{ (n_0^2 - n^2 - \kappa^2)^2 + 4n_0^2 \kappa^2 \right\}}$$

$$\eta_K = n_0 \frac{\varepsilon_0 \left\{ n(n_0^2 - n^2 + 3\kappa^2) \sigma_{xy}' + \kappa(n_0^2 - 3n^2 + \kappa^2) \sigma_{xy}'' \right\}}{\omega(n^2 + \kappa^2) \left\{ (n_0^2 - n^2 - \kappa^2)^2 + 4n_0^2 \kappa^2 \right\}}$$

問題 3. 1 4 複屈折による異常光線のエネルギーの伝搬方向が x 軸から
 $-\tan^{-1}(\varepsilon_{xy}/\varepsilon_{xx})$ だけ傾いていることを示せ。

[ヒント] 異常光線においては

$$\mathbf{E}_1 = A \exp \left\{ -i\omega \left(t - \frac{N_1}{c} x \right) \right\} (\varepsilon_{xy} \mathbf{i} - \varepsilon_{xx} \mathbf{j})$$

と書ける。一方, マクスウェルの方程式

$$\text{rot} \mathbf{E}_1 = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial t}$$

より

$$\mathbf{H}_1 = \frac{N}{\mu_0 c} \mathbf{E}_1 \times \mathbf{i}$$

が得られる。これをポインティングベクトルの式 $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ に代入して

$$\mathbf{S} = -E_{1y}^2 \mathbf{i} + E_{1x} E_{1y} \mathbf{j} = E_{1x} E_{1y} \frac{\varepsilon_{xx} \mathbf{i} - \varepsilon_{xy} \mathbf{j}}{\varepsilon_{xy}}$$

となる。 ε_{xy} が有限ならばポインティング・ベクトルは x 軸 (\mathbf{i}) から傾いたものになっていることが分かる。

第 3 章の参考文献

- 1) たとえば L.L.Landau and E.M.Lifshitz: Electromagnetism in Continuous Media 邦訳はランダウ, リフシッツ「電磁気学 1, 2」(井上, 安河内, 佐々木訳, 東京図書) Chap.11. § 82. 参照.
- 2) たとえば P.N. Argyres: Phys. Rev. 97 (1955) 334. や H.S. Bennett and E.A. Stern: Phys. Rev. 137 (1964) A448. 参照. 各々の論文によって誘電率テンソルの表記法や波動の表式に若干の相違がみられるので注意が必要である.
- 3) S. Wittekoek, T.J.A. Popma, J.M. Robertson and P.F. Bongers: Phys. Rev. **B12** (1975) 2777.
- 4) L.L. Landau and E.M. Lifshitz: 前掲書 § 66.
- 5) F. Stern: Solid State Physics, ed. F. Seitz and D. Turnbull (Academic, 1963) Vol. **15**, p299.
- 6) この式は基本的には文献 3 の(10)と(11)式と同じであるが, カー回転およびカー楕円率 の定義の違いにより異なった表式となっている.
- 7) D.Y. Smith: J. Opt. Soc. Amer. **66** (1970) 547.