電磁気学Ｂ中間テスト解答

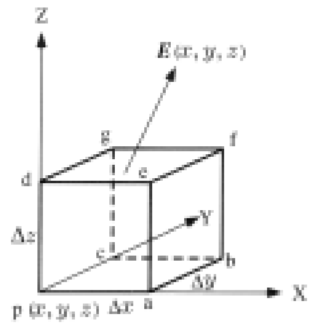
<table>
<tr><td>問題１</td><td colspan="2">各点における電場ベクトルは下記の通り。
ｐ点$\left(E_x,\quad E_y,\quad E_z\right)$
a 点$\left(E_x+\Delta x\dfrac{\partial E_x}{\partial x},\quad E_y,\quad E_z\right)$
b 点$\left(E_x+\Delta x\dfrac{\partial E_x}{\partial x},\quad E_y+\Delta y\dfrac{\partial E_y}{\partial y},\quad E_z\right)$
ｃ点$\left(E_x,\quad E_y+\Delta y\dfrac{\partial E_y}{\partial y},\quad E_z\right)$
ｄ点$\left(E_x,\quad E_y,\quad E_z+\Delta z\dfrac{\partial E_z}{\partial z}\right)$
ｅ点$\left(E_x+\Delta x\dfrac{\partial E_x}{\partial x},\quad E_y,\quad E_z+\Delta z\dfrac{\partial E_z}{\partial z}\right)$
ｆ点$\left(E_x+\Delta x\dfrac{\partial E_x}{\partial x},\quad E_y+\Delta y\dfrac{\partial E_y}{\partial y},\quad E_z+\Delta z\dfrac{\partial E_z}{\partial z}\right)$
ｇ点$\left(E_x,\quad E_y+\Delta y\dfrac{\partial E_y}{\partial y},\quad E_z+\Delta z\dfrac{\partial E_z}{\partial z}\right)$


図１　微小な平行六面体
各面の中心を横切る電場ベクトルは頂点の電場ベクトルの平均として与えられるから、
$\left\langle E_x\right\rangle_{abfe}=\left(4E_x+4\Delta x\dfrac{\partial E_x}{\partial x}+2\Delta y\dfrac{\partial E_x}{\partial y}+2\dfrac{\partial E_x}{\partial z}\right)/4$
$\left\langle E_x\right\rangle_{pcgd}=-\left(4E_x+2\Delta y\dfrac{\partial E_x}{\partial y}+2\Delta z\dfrac{\partial E_x}{\partial z}\right)/4$
$\left\langle E_y\right\rangle_{cbfg}=\left(4E_y+2\Delta x\dfrac{\partial E_y}{\partial x}+4\Delta y\dfrac{\partial E_y}{\partial y}+2\Delta z\dfrac{\partial E_y}{\partial z}\right)/4$
$\left\langle E_y\right\rangle_{paed}=-\left(4E_y+2\Delta x\dfrac{\partial E_y}{\partial x}+2\Delta z\dfrac{\partial E_y}{\partial z}\right)/4$
$\left\langle E_z\right\rangle_{efgd}=\left(4E_z+2\Delta x\dfrac{\partial E_z}{\partial x}+2\Delta y\dfrac{\partial E_z}{\partial y}+4\Delta z\dfrac{\partial E_z}{\partial z}\right)/4$
$\left\langle E_z\right\rangle_{abcp}=-\left(4E_z+2\Delta x\dfrac{\partial E_z}{\partial x}+2\Delta y\dfrac{\partial E_z}{\partial y}\right)/4$

ガウスの定理に代入して、
$\left(\left\langle E_x\right\rangle_{abfe}+\left\langle E_y\right\rangle_{pcgd}\right)\Delta y\Delta z+\left(\left\langle E_y\right\rangle_{cbfg}+\left\langle E_y\right\rangle_{paed}\right)\Delta x\Delta z+\left(\left\langle E_z\right\rangle_{efgd}+\left\langle E_z\right\rangle_{abcp}\right)\Delta x\Delta y=q/\varepsilon_0$
$\left(\dfrac{\partial E_x}{\partial x}+\dfrac{\partial E_y}{\partial y}+\dfrac{\partial E_z}{\partial z}\right)\Delta x\Delta y\Delta z=\dfrac{q}{\varepsilon\varepsilon_0}$
$\therefore\quad\dfrac{\partial E_x}{\partial x}+\dfrac{\partial E_y}{\partial y}+\dfrac{\partial E_z}{\partial z}=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$</td></tr>
<tr><td>問題２</td><td>(1)</td><td>$p_m=md$</td></tr>
</table>

(2)

(a)

$$V_1 = m/(4\pi\mu_0 r_1)$$

(b)

$$V_2 = -m/(4\pi\mu_0 r_2)$$

(c)

$$r_1 = r - (d\cos\theta)/2$$

(d)

$$r_2 = r + (d\cos\theta)/2$$

(e)

$$\begin{aligned} V_m(r) &= V_1 + V_2 \\ &= \frac{m}{4\pi\mu_0}\left(\frac{1}{r - d\cos\theta/2} - \frac{1}{r + d\cos\theta/2}\right) \\ &= \frac{m}{4\pi\mu_0}\frac{d\cos\theta}{r^2 - \frac{d^2}{4}\cos^2\theta} \\ &\cong \frac{md\cos\theta}{4\pi\mu_0 r^2} \end{aligned}$$

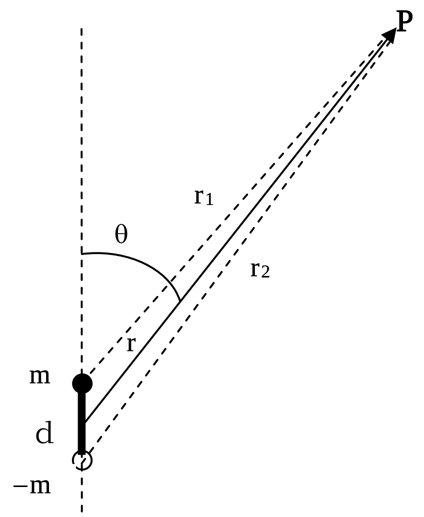


図 2 磁気双極子と観測点 P

(f) p_mを使って

$$V_m(r) = \frac{p_m\cos\theta}{4\pi\mu_0 r^2}$$

(3)

$$\vec{H}(\vec{r}) = -grad\ V_m(r)$$

$$H_r = -\frac{\partial V_m(r)}{\partial r} = \frac{p_m\cos\theta}{2\pi\mu_0 r^3}$$

$$H_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V_m(r)}{\partial\theta} = \frac{p_m\sin\theta}{4\pi\mu_0 r^3}$$

問題３

類似点　表と裏で逆向き、距離に依らず一定
相違点　電場は表面に垂直だが、磁場は表面に平行

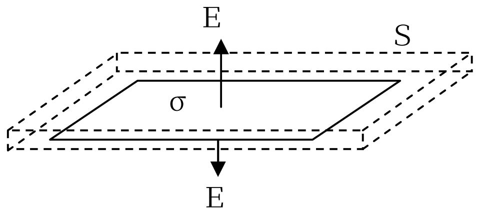
解説

無限に広い一様な電荷による電場

ガウスの法則

$$ES + ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

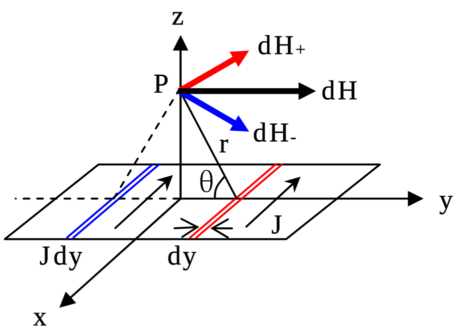
$$\therefore \quad E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$



電場　　平面に垂直（表と裏で逆向き）
　　　　距離に依らず一定

無限に広い平面電流による磁場
無限長の細線 dy を流れる電流　Jdy
Jdy が P 点につくる磁場 dH_+、dH_-

$$dH_\pm = \frac{Jdy}{2\pi r} \quad \text{(向きは図の通り。)}$$



合成された磁場 dH

$$dH = 2dH_\pm \sin\theta$$

$$= \frac{J\sin\theta}{\pi r}dy$$

ここで、$r = \sqrt{h^2 + y^2}$,　$\sin\theta = h/\sqrt{h^2 + y^2}$ だから、

$$dH = \frac{J}{\pi}\frac{h}{\left(h^2 + y^2\right)}dy$$

次に、$y = h\tan\varphi$ と変数変換して、$dy = hd\varphi/\cos^2\varphi$ を使うと、

y	0	∞
φ	0	π/2

$$dH = \frac{J}{\pi}d\varphi$$

$$\therefore \quad H = \frac{J}{\pi}\int_0^{\pi/2} d\varphi = J/2$$

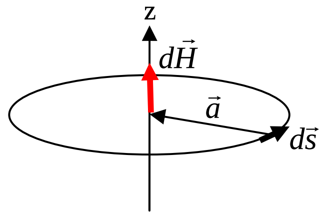
磁場　　平面に平行　（表と裏で逆向き）
　　　　距離に依らず一定

問題４

円電流の中心における磁場

$$d\vec{H} = \frac{I}{4\pi}\frac{d\vec{s}\times\vec{a}}{a^3} = \frac{I}{4\pi}\frac{ads\sin(\pi/2)}{a^3}\vec{k} = \frac{I}{4\pi}\frac{d\theta}{a^2}\vec{k}$$

ただし、$\vec{k}$ は z 軸方向の単位ベクトル、
θは z 軸周りの回転角で、$ds = ad\theta$ の関係を使った。



$$\vec{H} = \frac{I\vec{k}}{4\pi a}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{I}{2a}\vec{k}$$

$$H = \frac{I}{2r} = \frac{2[A]}{2\cdot 0.5[m]} = 2.0[A/m] = 2.0[N/weber]$$

問題 5	等価電流 I $I = p_m / \mu_0 = \dfrac{10^{-4}\left[weber / m\right]}{4\pi \times 10^{-7}\left[weber^2 / \left(Nm^2\right)\right]} = \dfrac{1}{4\pi} \times 10^3 \left[Nm / weber\right]$ $\cong 80\left[Nm / weber\right] = 80\left[A\right]$
自 由 記 述	