電磁気学演習　第７回　(2005. 2. 7)

問1　真空中では Maxwell の方程式は以下の 4 つの基本方程式から成る。

$$rot\vec{B}(\vec{r},t)=\mu_0\left(\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t}+\vec{j}(\vec{r},t)\right) \tag{1}$$

$$rot\vec{E}(\vec{r},t)=-\frac{\partial\vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t} \tag{2}$$

$$div\vec{E}(\vec{r},t)=\rho(\vec{r},t)/\varepsilon_0 \tag{3}$$

$$div\vec{B}(\vec{r},t)=0 \tag{4}$$

(1) 電荷も電流も存在しない空間における Maxwell 方程式を書き下せ。それらの式を、それぞれ(1')～(4')とする。

(2) (1')と(2')を用いて、磁束密度 $\vec{B}(\vec{r},t)$ を消去した微分方程式(これを 5 式とする)を書け。

(3) 一般に、$rotrot\vec{A}=grad\left(div\vec{A}\right)-\vec{\nabla}^2\vec{A}$ の関係（i）が成り立つことを以下のように証明する。①～⑧を埋めよ。$\vec{A}=\left(A_x,A_y,A_z\right)$ とすると、$div\vec{A}=$①である。したがって、$\left[grad\left(div\,\vec{A}\right)\right]_x=$②となる。また、$\vec{\nabla}=\left(\partial/\partial x,\partial/\partial y,\partial/\partial z\right)$だから、$\left[\vec{\nabla}^2\vec{A}\right]_x\equiv\left[\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{A}\right]_x=$③となる。よって、(i)の右辺の x 成分は④となる。一方、$\left(rot\vec{A}\right)_x=$⑤、$\left(rot\vec{A}\right)_y=$⑥、$\left(rot\vec{A}\right)_z=$⑦だから、$\left(rotrot\vec{A}\right)_x=$⑧となり、④と一致する。

(4) (3)の(i)と(3')を用いて(5)式を展開することにより、$\vec{\nabla}^2\vec{E}=\varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$ (これを 6 式とする)となることを示せ。また、その x 成分を書き下せ。

(5) $\vec{E}=\left(E_x,E_y,E_z\right)$としたとき、$E_x(\vec{r},t)=E_{0x}\cos\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)$（これを 7 式とする）は 6 式を満たすことを示せ。ここで、$\vec{k}=\left(k_x,k_y,k_z\right)$は波数ベクトルである。$\vec{k}^2=k_x^2+k_y^2+k_z^2$ を ω で表せ。

(6) $\vec{k}=(0,0,1)$、$E_{0x}=1$、$\omega=1$のとき、$t=0,\pi/4,\pi/2$ における $E_x(\vec{r},t)$を横軸 z に対して 1 周期分グラフに描け。$\omega=2$ の場合のグラフも描け。ω が 2 倍になると、波の進む速度は何倍になるか?

(7) 真空中を伝わる電磁波の速度は真空中の光速 c に等しい。(5)と(6)の結果から類推して、光速を ε_0 と μ_0 を用いて表せ。

(8) $E_x(\vec{r},t)=E_{0x}\cos\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)$, $E_y(\vec{r},t)=E_{0y}\cos\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)$, $E_z(\vec{r},t)=E_{0z}\cos\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)$のとき、これらを(3')に代入することにより、$\vec{k}$ と $\vec{E}_0=\left(E_{0x},E_{0y},E_{0z}\right)$が直交することを示せ。

問2　Maxwell 方程式の解 $\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}_0\cos\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)$について具体的に考える。$\vec{k}=(2,0,0)$ [rad/m]のとき以下の問に答えよ。ただし、真空の誘電率は$\varepsilon_0=8.85\times10^{-12}$ [$C^2N^{-1}m^{-2}$]、真空の透磁率は$\mu_0=1.26\times10^{-6}$ [$kgmC^{-2}$]である。

(1)　$\vec{k}$ および ε_0, μ_0 から電磁波の角振動数 ω [rad/s]を求めよ。

(2)　電磁波の進む方向、速度[m/s]、波長[m]を求めよ。