電磁気学演習　第１回　(2004.12.6)

問１　ベクトルの内積と外積に関する以下の問に答えよ。

(１)　二次元のベクトル $\vec{A}=\left(A_x,\,A_y\right)$ と $\vec{B}=\left(B_x,\,B_y\right)$ の内積 $\vec{A}\cdot\vec{B}$ を求めたい。下記の成分で表されるベクトル $\vec{A}$ と $\vec{B}$ を図示せよ。さらに、内積の値を① $A_xB_x+A_yB_y$ と、② $\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\cos\theta$（θは $\vec{A}$ と $\vec{B}$ のなす角）の二通りの方法で計算し、表の空欄を埋めよ。

(a) $\vec{A}=(1,0),\quad \vec{B}=(1,1)$　　(b) $\vec{A}=\left(\sqrt{3},1\right),\quad \vec{B}=\left(1,\sqrt{3}\right)$

(２)　三次元のベクトル $\vec{A}=\left(A_x,\,A_y,A_z\right)$ と $\vec{B}=\left(B_x,\,B_y,\,B_z\right)$ の外積 $\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}$ を求めたい。下記の成分で表されるベクトル $\vec{A}$ と $\vec{B}$ 及び $\vec{C}$ を xy 平面と yz 平面に投影した図を示せ。さらに、外積の大きさ $\left|\vec{C}\right|$ を、① $\sqrt{\left(A_yB_z-A_zB_y\right)^2+\left(A_zB_x-A_xB_z\right)^2+\left(A_yB_x-A_xB_y\right)^2}$ と、② $\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\sin\theta$（θは $\vec{A}$ と $\vec{B}$ のなす角）の二通りの方法で計算し、表の空欄を埋めよ。

(a)　$\vec{A}=(1,1,1),\quad \vec{B}=(1,1,0)$　　(b)　$\vec{A}=\left(\sqrt{3},0,1\right),\quad \vec{B}=\left(1,\sqrt{3},0\right)$

問 2　二次元空間内で定義されたスカラー A とベクトル $\vec{B}\left(B_x,\,B_y\right)$ に対し、解答用紙の格子点（●印）において $\vec{\alpha}=grad\ A$ と $\beta=div\ \vec{B}$ を計算し図示せよ。ベクトル $\vec{\alpha}$ についてはその向きと大きさを矢印でなるべく正確に、スカラー β に対してはその大きさを数値で書き入れよ。

$$grad\ A=\left(\frac{\partial A}{\partial x},\frac{\partial A}{\partial y}\right) \qquad div\ B=\frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}$$

(1)　$A(x,y)=1/\sqrt{x^2+y^2}$　　(2)　$B_x(x,y)=x^2y/\sqrt{x^2+y^2},\quad B_y(x,y)=xy^2/\sqrt{x^2+y^2}$

問 3　半径 a の球内に一様な密度 ρ で電荷（総量 Q）が分布しているとき、球内と球外の電場の強さ $E(r)$ を中心からの距離 r の関数として求めたい。以下の問に答えよ。

(1)　ガウスの法則の積分形　$\int_S \vec{E}(r)\cdot d\vec{S}=Q/\varepsilon_0$　を用いて、(i) $r\le a$ と (ii) $r\ge a$ における電場を求め、図示せよ。

(2)　距離 $\vec{r}=(x,\,y,\,z)$ の点における電位 $V(\vec{r})$ は次式で与えられる。（教科書 p.40-41 参照）

(i)　$V(x,y,z)=\dfrac{\rho\left(3a^2-x^2-y^2-z^2\right)}{6\varepsilon_0}$　　(ii)　$V(x,y,z)=\dfrac{\rho a^3}{3\varepsilon_0\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$\vec{E}(x,y,z)=-grad\ V(x,y,z)$ の式から、電場の各成分 E_x、E_y、E_z を求めよ。

(3)　(2)で求めた電場に対し、$div\ \vec{E}$ を計算し、ガウスの法則の微分形を満たすことを確認せよ。(i)と(ii)の領域で電場の湧き出しの有無について述べよ。